





> **Caos de la exponencial en el plano complejo**

Enrique Acosta Jaramillo

Esta y las demás ilustraciones a color de este artículo son detalles del espacio de parámetros de la dinámica de la familia de funciones λe^z .

> Caos de la exponencial en el plano complejo

Enrique Acosta Jaramillo

Es asombroso que una función con una apariencia tan sencilla como e^z pueda guardar tanta complejidad. Se trata de la función que a cada número complejo $z = x + iy$ le asocia otro número complejo:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Este artículo presenta una descripción de la dinámica de la familia de funciones exponenciales de la forma $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ donde λ es una constante real.

Al referirnos a la dinámica de una función f hacemos alusión al comportamiento de la función bajo iteraciones. Estudiamos la sucesión que se obtiene al iterar la función sobre un número complejo z_0 :

$$\{f(z_0), f^2(z_0) = f(f(z_0)), f^3(z_0), \dots, f^n(z_0), \dots\} = \{f^n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

que llamamos *la órbita de z_0* , denotada $O_f(z_0)$, y el límite de esta sucesión, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0)$, que es como el “destino” de z_0 bajo iteraciones de la función.

Resulta claro que dada una función continua y un punto z_0 existen básicamente cuatro posibles tipos de destino.

1. El valor absoluto de $f^n(z_0)$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito. Se dice que z_0 *se escapa al infinito*.
2. z_0 es *eventualmente periódico*, es decir después de cierto número de iteraciones los valores se empiezan a repetir y se tiene $f^{k+n}(z_0) = f^k(z_0)$ para un cierto n que se llama *el período*.
3. $O_f(z)$ es una sucesión convergente y $f^n(z_0) \rightarrow p$. Es fácil ver que, entonces, $f(p) = p$ por lo que p es un *punto fijo* de f .
4. También es posible que no suceda ninguna de las posibilidades anteriores.

Para representar la dinámica de la función, usualmente se le da un color a cada punto z del plano, según su destino, y esta gráfica muchas veces



resulta de una belleza espectacular. Una manera de hacerlo consiste en utilizar el computador que examina un número finito de valores de la órbita de cada punto, y del comportamiento observado *estimar* su destino. Sin embargo, como veremos, estas estimaciones pueden resultar erróneas dado que el computador hace un redondeo de los números que se va acumulando. Trataremos de hacer un análisis matemático de las órbitas de los puntos para corregir los errores del computador.

La familia de funciones

$E_\lambda(z) = \lambda e^z$ con λ real

Sobre la dinámica de la familia de funciones $\{E_\lambda(z) = \lambda e^z \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ podemos hacer las siguientes afirmaciones generales:

- Como e^z tiene periodo $2i\pi$, λe^z tendrá el mismo período y por lo tanto su dinámica se repetirá por franjas horizontales cada múltiplo entero de $2i\pi$.
- La imagen por $E_\lambda(z)$ de una recta vertical, $x=a$, es un círculo² centrado en el origen de radio λe^a . Además, si $b < a$ entonces $e^b < e^a$ y la imagen de la franja vertical $\{z = x + iy \mid b \leq x \leq a\}$ es una “arandela” centrada en cero con radio interior λe^b y radio exterior

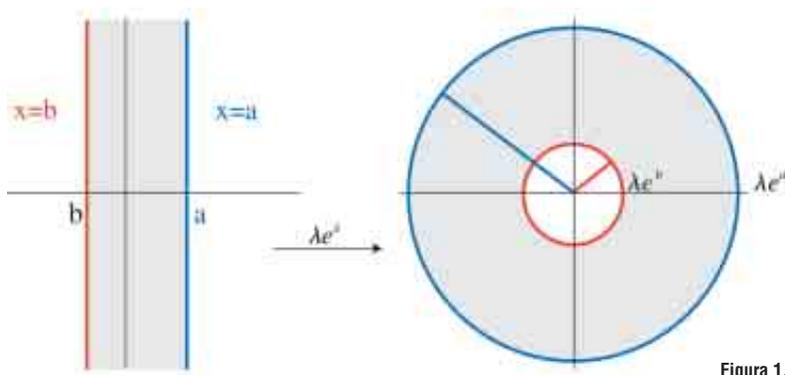


Figura 1. Imagen de una franja vertical

¹ $e^{z+2i\pi} = e^{x-iy+2i\pi} = e^x e^{i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \operatorname{sen}(y+2\pi)) = e^z$

² Si $x=a$ se tendrá $\lambda e^z = \lambda e^{a+iy} = \lambda e^a (\cos y + i \operatorname{sen} y)$ QUE corresponde a un círculo de radio λe^a cuando y varía en \mathbb{R} .



λe^a como se muestra en la figura 7. Así mismo, la imagen del semiplano $\{z = x + iy \mid -\infty < x \leq a\}$ es un disco lleno de radio λe^a centrado en el origen sin ese punto.

El caso $\lambda = 1/e$

Un caso muy importante en la familia de funciones que estamos estudiando es el de $\lambda = 1/e$, porque el comportamiento de la dinámica para valores de $\lambda \leq 1/e$ es muy diferente al comportamiento para $\lambda > 1/e$. A un valor de cambio brusco como éste se le llama *punto de bifurcación*.

Para $\lambda = 1/e$, $E_\lambda(z) = e^z/e$ tiene un punto fijo en $z=1$ puesto que $E_\lambda(1) = 1$. Además, debido a la periodicidad de la función $E_\lambda(1 + 2ki\pi) = E_\lambda(1) = 1$. Por otra parte, el semiplano $H = \{z = x + iy \mid -\infty < x \leq 1\}$ es enviado bajo E_λ en el disco de radio 1 centrado en el origen sin ese punto (figura 8). Bajo E_λ , la imagen de este disco está contenida en el mismo círculo ya que el disco es un subconjunto de H . Así, todos los puntos que llegan al disco bajo iteraciones de E_λ se mantienen allí tras otras iteraciones,

luego las órbitas de los puntos de H son acotadas. En realidad se puede demostrar que todo punto que llegue bajo iteraciones al semiplano H tendrá una órbita que converge a $z=1$.

Al conjunto de puntos cuya órbita converge a $z=1$ se le llama la *cuenca de atracción del 1*. Ya sabemos que H es un subconjunto de esta cuenca; analicemos ahora los puntos que bajo iteraciones de E_λ llegan a H : todos estos puntos tendrán órbitas que convergen al punto $z=1$. Primero se encuentran los puntos que bajo una iteración llegan a H , es decir el conjunto $\{z \in \mathbf{C} \mid E_\lambda(z) \in H\}$. La figura 3 muestra dicho conjunto en sombreado gris y a H en azul.

Por otra parte, se puede demostrar que en cada una de las regiones blancas que hemos enumerado $\dots, S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, \dots$ y que llamaremos “dedos”, E_λ es 1-1, es decir, $E_\lambda(z_1) \neq E_\lambda(z_2)$ si $z_1 \neq z_2$, y las imágenes bajo una iteración de E_λ caen fuera de H , pero algunos caen en la región gris y otros no. Luego, en cada S_i hay regiones

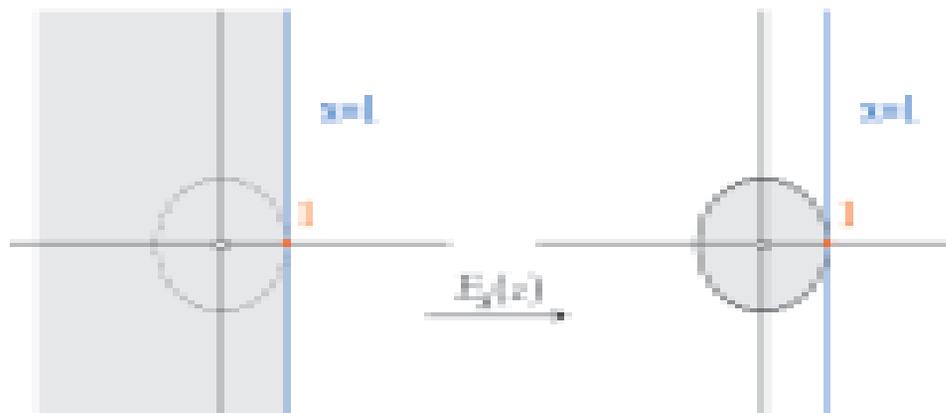


Figura 2.
Imagen de H bajo
 $E_\lambda(z) = \frac{1}{e} e^z$



Figura 3.
Conjunto que en una iteración cae en H

que bajo dos iteraciones caen en H , formando zonas grises de la cuenca de atracción de $z=1$ dentro de los dedos blancos de la figura anterior. (Véase la figura 4). En cambio, las regiones blancas que aparecen en los dedos son enviadas por E_λ en algún S_i .

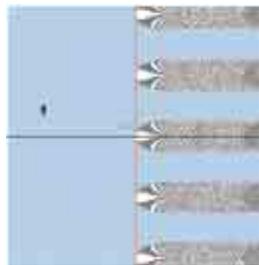


Figura 4.
La región gris cae en H en la segunda iteración

En realidad, los dedos S_i se extienden al infinito hacia la derecha, al igual que las regiones grises dentro de ellos, aunque la imagen del computador aparente otra cosa debido a los errores de redondeo. Así, aun cuando las figuras muestran turbulencias en los dedos, realmente lo que sucede es lo que se observa en los detalles de las figuras 6 y 7.

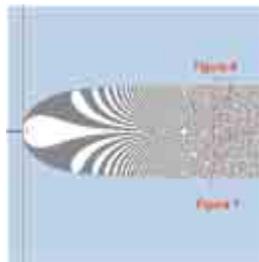


Figura 5.
Detalle de la figura 4

Si seguimos investigando en la misma dirección, encontramos que en cada una de las partes blancas que van quedando hay regiones que en la tercera iteración llegan a H , y por lo tanto se colorean de gris por pertenecer a la cuenca de atracción de $z=1$, y en cada uno de los pequeños dedos habrá nuevos dedos que en la segunda iteración son enviados en alguno de los S_i .

¿Cuáles son los puntos cuyas órbitas llegan a H ? Los dibujo

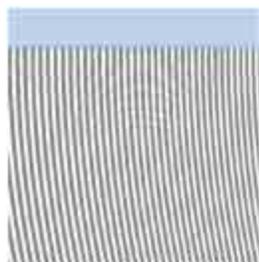


Figura 6. Detalle

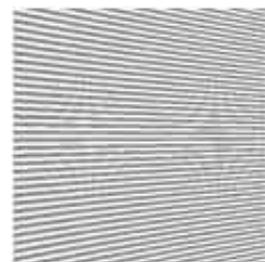


Figura 7. Detalle

jos que se pueden hacer en computador son muy imprecisos; en efecto, la figura 5 hace creer que hay algún tipo de remolinos en los dedos, esto desde luego no es verdad ya que cada dedo se extiende al infinito, los supuestos remolinos que se ven son errores computacionales. En realidad, para generar más allá de la quinta iteración en un computador convencional, éste deberá calcular varias horas; aún así las imágenes no son satisfactorias ya que el conjunto verdadero tiene una estructura extremadamente fina. En las siguientes figuras se muestran en gris los puntos que llegan a H en la cuarta iteración o antes. Estos puntos pertenecen a la cuenca de atracción de $z=1$.

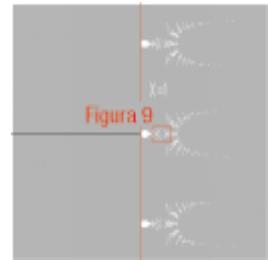


Figura 8.
La región gris cae en H en la cuarta iteración (o antes)

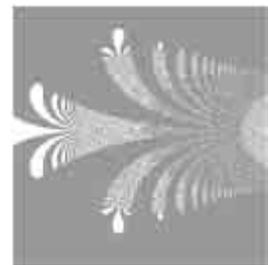


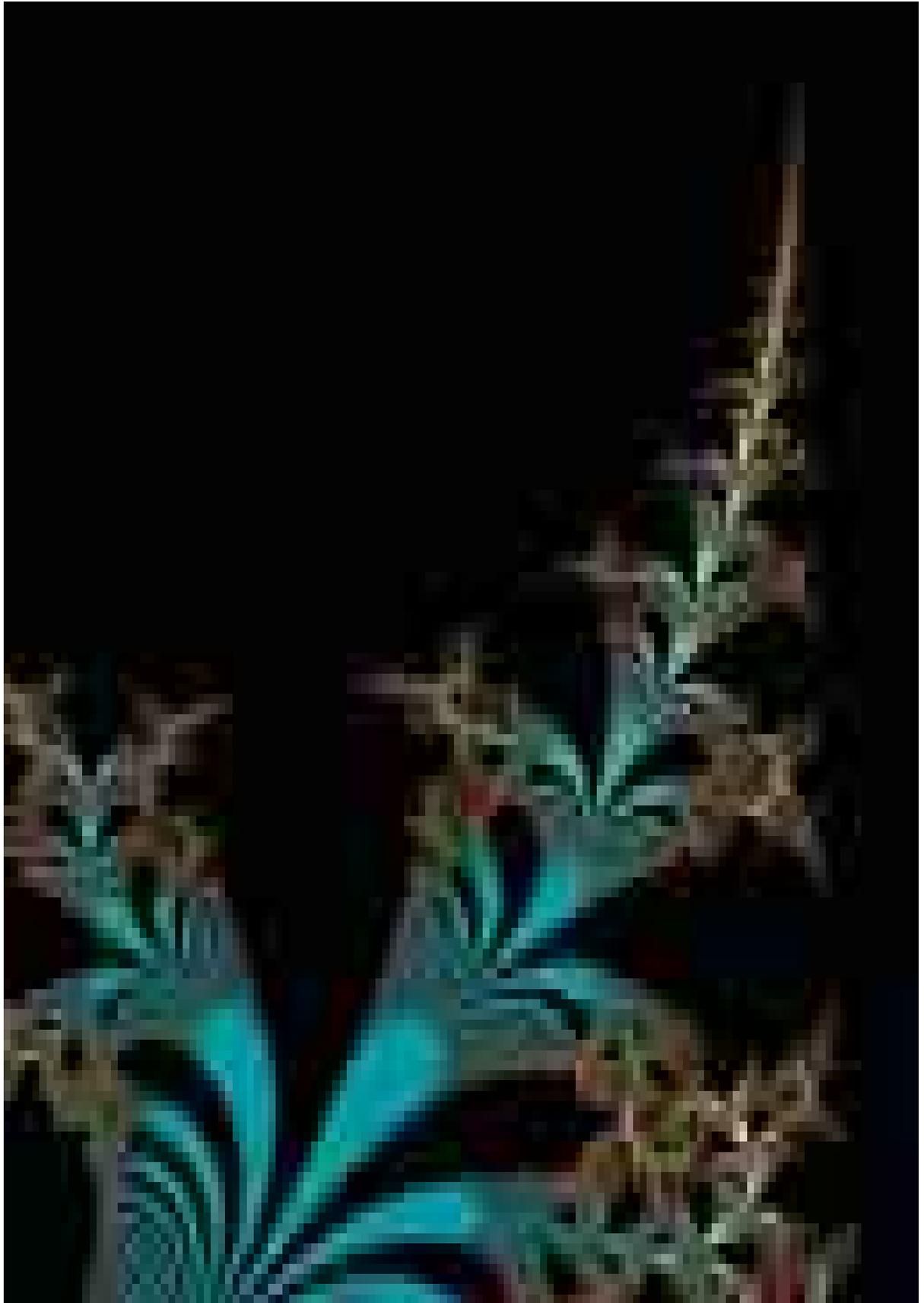
Figura 9.
Detalle (Recuadro rojo de la figura 8)

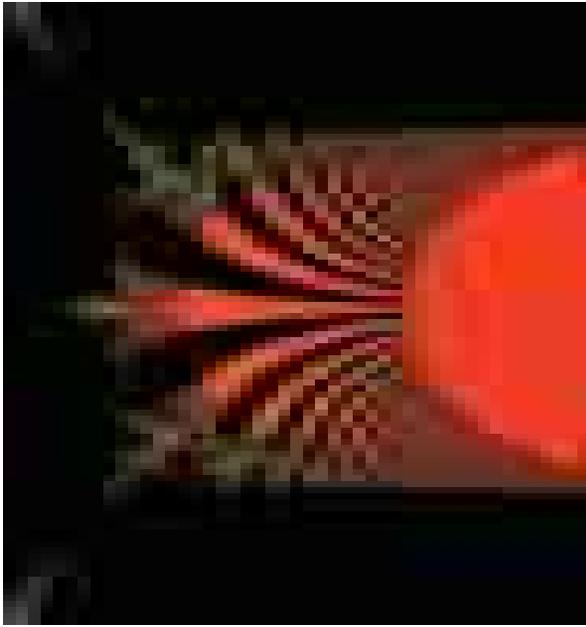
Después de analizar la cuenca de atracción de $z=1$ podemos analizar el conjunto de los puntos que se escapan a infinito. Ellos forman la cuenca de atracción del infinito y ocupan gran parte de la zona blanca pero no toda. Hay puntos que no están ni en la cuenca de $z=1$ ni en la cuenca del infinito; pertenecen a la frontera de este último conjunto. Esta frontera se llama el *conjunto de Julia* de E_λ –notado $J(E_\lambda)$ – en honor al francés Gaston Julia que fue el primero en explorar estos conjuntos.

En el caso especial de E_λ , los puntos de la cuenca del infinito son todos fronterizos³ y, por lo tanto, están contenidos en el conjunto de Julia. Además, el siguiente teorema nos dice que el conjunto de Julia está compuesto precisamente por los puntos cuya órbita no contiene ningún punto de H .

TEOREMA 1: Si A es el conjunto de todos los puntos cuya órbita no interseca a H entonces $A = J(E_\lambda)$.

³Un punto es fronterizo o pertenece a la frontera de un conjunto si cualquier círculo con centro en el punto –no importa qué tan pequeño sea su radio– contiene a la vez puntos del conjunto y puntos que no están en el conjunto





¿Entonces, qué otros puntos contiene el conjunto de Julia de E_λ fuera de los que se escapan al infinito? El siguiente teorema, que a veces se utiliza como definición alternativa de $J(E_\lambda)$, nos puede dar una idea.

TEOREMA 2: $J(E_\lambda)$ es la clausura del conjunto de puntos periódicos repelentes de E_λ ; es decir, $J(E_\lambda)$ es el conjunto de puntos periódicos repelente más la *frontera* de este conjunto.

Descifremos lo que dice el teorema. Ya sabemos qué son los puntos periódicos, definidos al principio. Los que trata el teorema deben ser repelentes, es decir, si un punto cualquiera está cerca de uno de estos puntos periódicos, por iteraciones de E_λ debe alejarse de él. A estos puntos periódicos repelentes hay que sumarles los puntos que son fronterizos a ellos.

Resulta entonces que todo punto z del plano que tenga una órbita que nunca intersecta a H tiene las siguientes propiedades:

- O bien z es un punto periódico repelente, o bien la órbita de z escapa a infinito.
- Si la órbita de z escapa a infinito, hay puntos periódicos repelentes arbitrariamente cercanos a z .

Las anteriores caracterizaciones de $J(E_\lambda)$, junto con algunos teoremas nos permiten generar imágenes por computador aproximadas de $J(E_\lambda)$ en las cuales se puede apreciar más la estructura global a costo de menos detalles. Uno de estos teoremas afirma que si la parte real de un complejo z es mayor que 50, entonces cerca de z hay puntos de $J(E_\lambda)$; específicamente hay puntos cuya órbita escapa a infinito. Este criterio de escape es el utilizado en muchos artículos para generar imágenes aproximadas de $J(E_\lambda)$. A continuación presentamos algunas imágenes generadas con este criterio aproximado.

En las figuras 10 a 15, cada recuadro rojo muestra la región que se ve en la siguiente imagen. Además, las regiones que aparecen blancas están realmente “llenas” de líneas grises que van al infinito; el criterio aproximado permite conocer qué región ocupan estas líneas pero no nos permite verlas.

$J(E_\lambda)$ en el caso $0 < \lambda < 1/e$ con λ real

Dejamos por ahora el caso $\lambda=1/e$ para estudiar el de $0 < \lambda < 1/e$, que en muchos aspectos es similar al estudiado anteriormente, pero que tiene mucha más estructura;

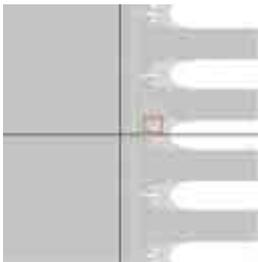


Figura 10. $J(E_\lambda)$ $\lambda = 1/e$



Figura 13. Detalle

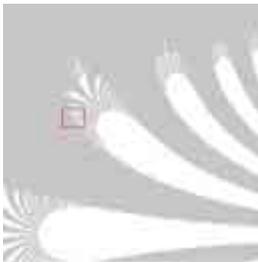


Figura 11. Detalle



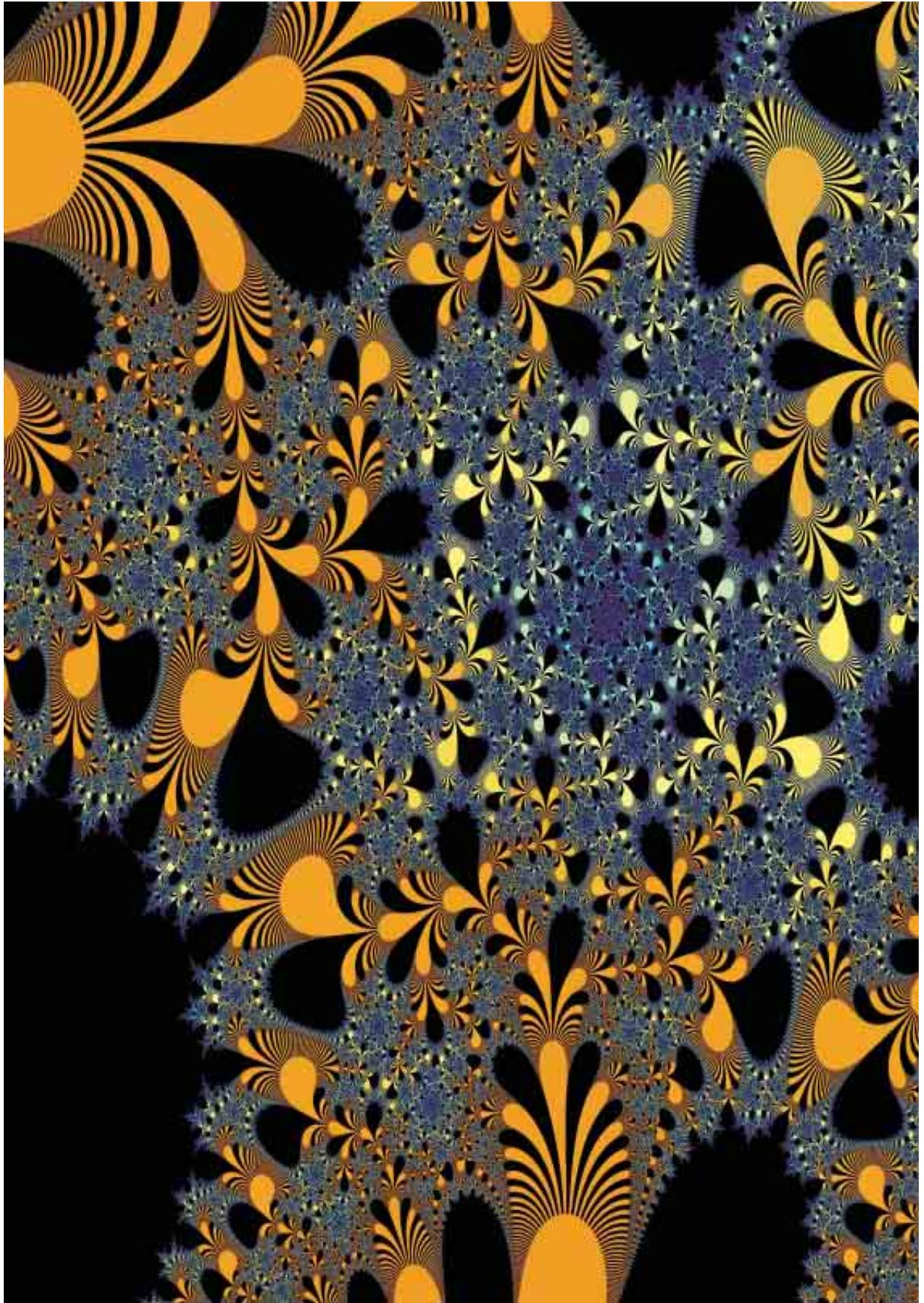
Figura 14. Detalle



Figura 12. Detalle



Figura 15. Detalle



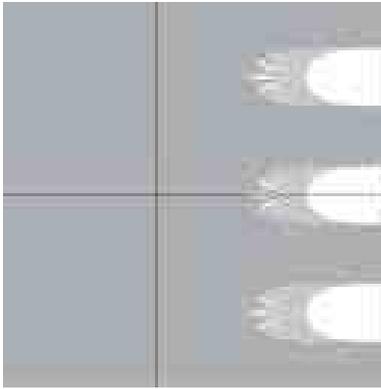


Figura 16. $J(E_\lambda)$ para $\lambda = 0.1$

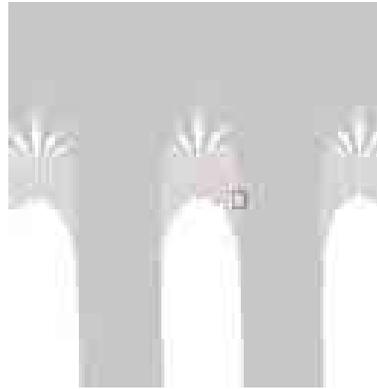


Figura 20. Detalle

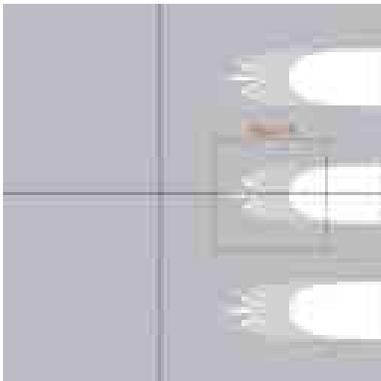


Figura 17. $J(E_\lambda)$ para $\lambda = 0.25$

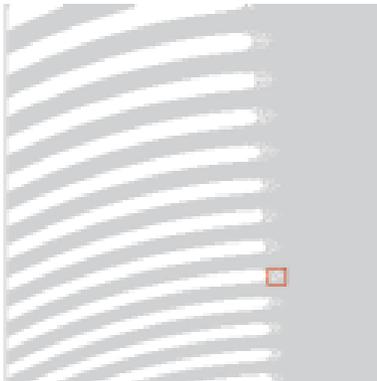


Figura 21. Detalle

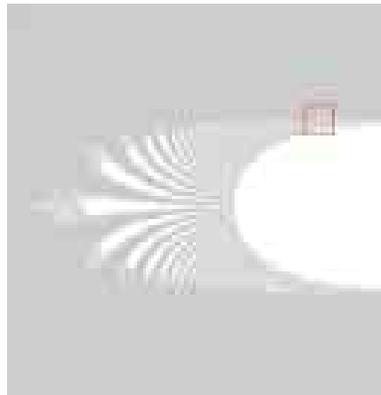


Figura 18. Detalle (figura 17)

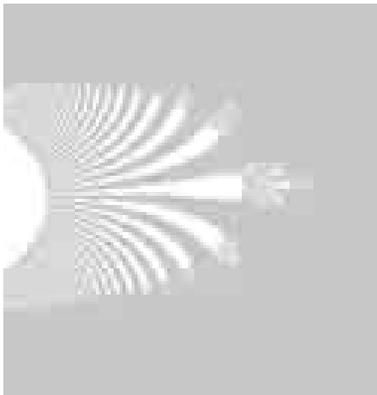


Figura 22. Detalle



Figura 19. Detalle

Detalles de $J(E_\lambda)$ para $\lambda=0.25$, el recuadro rojo en las imágenes muestra la región que se ve en la siguiente imagen. Las regiones blancas siguen estando "llenas" de líneas grises que van al infinito

después de todo, el caso $\lambda = 1/e$ es el intermedio, el punto donde ocurre la bifurcación. Por otra parte, la ecuación $x = \lambda e^x$ tiene dos soluciones reales, una menor que uno, que llamaremos p , y otra mayor que uno que notaremos q , estos serán puntos fijos para $E_\lambda(z) = \lambda e^z$. Además, en la dinámica de $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ el punto p va a tener un comportamiento muy similar al de $z = 1$ en el sentido de que la órbita de muchos puntos del plano convergerá a p .

El estudio de $J(E_\lambda)$ es, en este caso, similar al que se acaba de hacer. Para encontrar la cuenca de atracción de p se define un análogo a H que en este caso será el semiplano a la izquierda de $x = -1/n(\lambda)$ (recordemos que $-1/n(\lambda) > 0$ porque $0 < \lambda < 1$). Luego se encuentran las regiones que envían sus puntos a H . Todos los puntos en estas regiones tendrán órbitas que convergen al punto p y así habremos encontrado la cuenca de atracción de p . No entraremos en detalles ya que la construcción es igual a la hecha anteriormente y el conjunto resultante es geoméricamente similar. Por otra parte, podemos utilizar los teoremas 1 y 2, que siguen siendo válidos.

Presentamos en las figuras 16 a 21 algunas imágenes de $J(E_\lambda)$ para valores de λ , en el rango en cuestión, generadas utilizando el criterio de escape aproximado.

Además, para este caso se tiene el siguiente teorema acerca de la estructura de $J(E_\lambda)$.

TEOREMA 3: Para $0 < \lambda < 1/e$, $J(E_\lambda)$, consiste de una cantidad no enumerable de líneas que se extienden hacia la derecha, al infinito. Cada línea tiene un extremo y posee la misma

estructura continua —es homeomorfa— del intervalo $[0, \infty)$.

La aparición de estas líneas vista en la construcción del caso $\lambda = 1/e$, es lo que queda de los dedos al final de dicha construcción. Se puede demostrar, además, que si $z_0 \in J(E_\lambda)$ y z_0 no es un extremo de una línea, entonces la órbita de z_0 se escapa a infinito. Así, el conjunto de puntos periódicos repelentes de $E_\lambda(z)$ (Teorema 2) está contenido en el conjunto de extremos de las líneas, y hay extremos de líneas arbitrariamente cercanos a todo punto de $J(E_\lambda)$ que no sea extremo de una línea. ¡La estructura de $J(E_\lambda)$ no es nada simple! Se le ha dado el nombre muy sugestivo de “Bouquet de Cantor”, un objeto matemático con una definición muy precisa.

“La explosión”, $J(E_\lambda)$ en el caso $\lambda > 1/e$ con λ real

Pasamos ahora a estudiar el caso $\lambda > 1/e$ que nos muestra lo dramática que es la bifurcación de la familia en el punto $\lambda = 1/e$. En la literatura a esta bifurcación se le llama comúnmente “la explosión”.

A diferencia de las secciones anteriores, comenzamos con el teorema que nos caracteriza $J(E_\lambda)$.

TEOREMA 4: Si $\lambda > 1/e$ entonces $J(E_\lambda) = \mathbf{C}$, es decir, ¡el conjunto de Julia es todo el plano complejo!

La demostración de este teorema requiere técnicas avanzadas de matemáticas, sin embargo se explicará a grandes rasgos qué es lo que ocurre. Casi todos los puntos del plano complejo escapan al infinito y los únicos que quedan son los puntos periódicos, todos repelentes, que en el caso $0 < \lambda < 1/e$ se encontraban

en los extremos de las líneas del Bouquet de Cantor que era $J(E_\lambda)$. De repente explotan y cubren todo el plano. Al pasar la bifurcación sólo aparecen dos nuevos puntos fijos (complejos), y los puntos periódicos repelentes, que ahora cubren todo el plano, son básicamente los mismos que antes se encontraban localizados en una región fija del plano. Además, los teoremas 1 y 2 siguen siendo válidos.

La dinámica de la función exponencial para estos valores de λ es completamente “caótica”, sobre todo el plano, pues junto a cualquier punto del plano hay puntos periódicos repelentes y puntos con órbitas que escapan a infinito, arbitrariamente cercanos. La órbita de los puntos que escapan a infinito es completamente impredecible y radicalmente distinta a la de sus vecinos, por más cercanos que se encuentren, inclusive si ambos escapan a infinito. Para los matemáticos existe una definición muy precisa, la cual no incluiremos, de lo que es un comportamiento caótico. Con ella, podemos resumir lo anterior en el siguiente teorema.

TEOREMA 5: $J(E_\lambda)$ es el conjunto en el cual la dinámica de E_λ es caótica.

A continuación se presentan imágenes generadas de $J(E_\lambda)$ para el caso $\lambda = 1$ (figuras 23 y 24). Las imágenes son similares para otros valores de λ en el rango en cuestión. Hay que recordar que los espacios blancos de estas imágenes representan los puntos que tienen órbitas que escapan al infinito, pero que hay puntos periódicos en todo el plano que deberían verse como puntos negros. La inmensa mayoría no es visible debido a limitaciones computacionales.

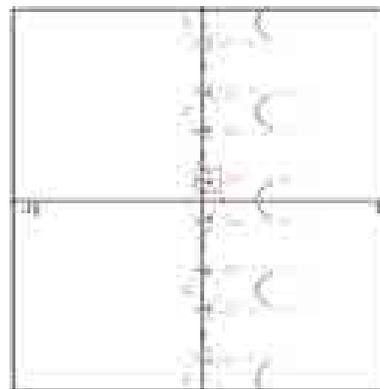


Figura 23. $J(E_\lambda)$ para $\lambda = 1$

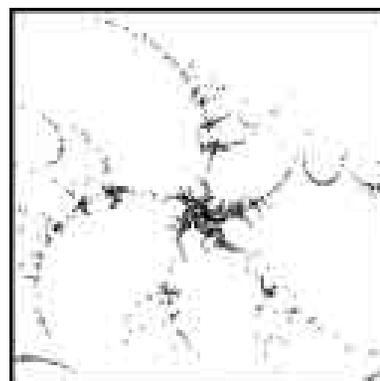
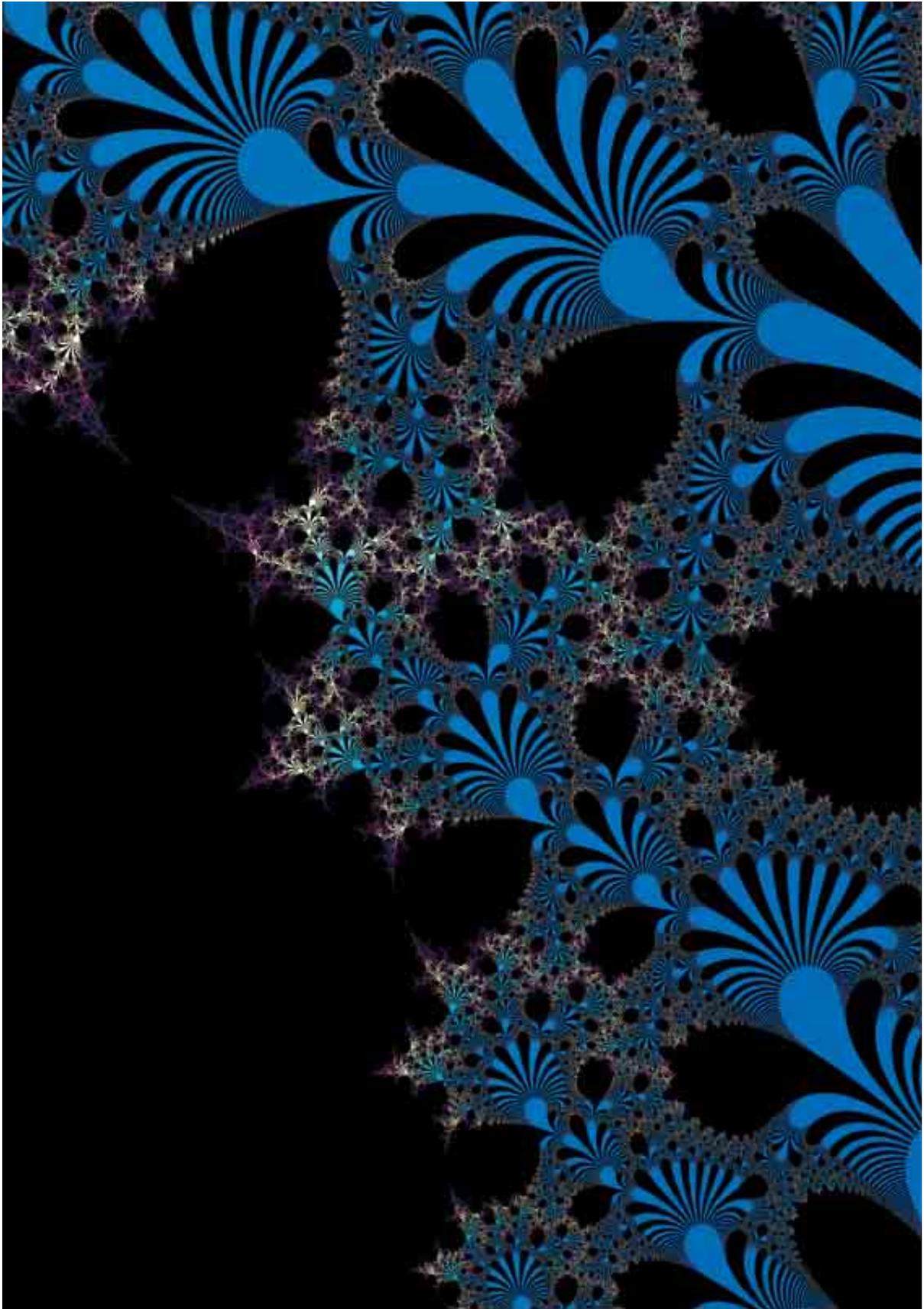


Figura 24. Detalle

Las figuras 25 a 27 muestran en escala de grises el número de iteraciones que los puntos demoran en escapar al infinito, con el criterio de escape aproximado. Entre más oscuro el punto más se tarda en escapar.

El espacio de parámetros

Es el deseo de cualquier matemático que estudia la dinámica de este tipo de funciones el tener un “mapa” que le muestre a grandes rasgos cuál es la dinámica de la función E_λ para los diferentes valores de λ . A este tipo de mapas se le llama *espacio de parámetros*; uno de los más famosos es el conjunto de Mandelbrot que muestra para qué valores de c es conexo, o totalmente desconexo el conjunto de Julia de la función $Q_c(z) = z^2 + c$. En el presente caso se puede estudiar el conjunto de los λ , ahora sí de todo el plano complejo, para los cuales $J(E_\lambda) = \mathbf{C}$. Para



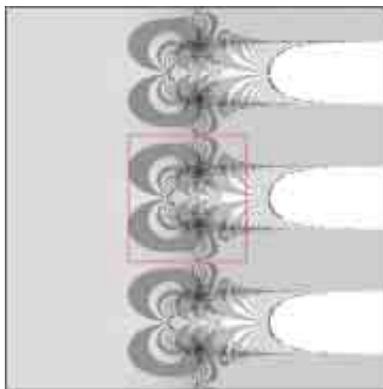


Figura 25.

cada $\lambda \in \mathbb{C}$ se considera la función $E_\lambda(z) = \lambda e^z$, se estudia su conjunto de Julia asociado y se puede generar una imagen en la cual los λ para los cuales $J(E_\lambda) = \mathbb{C}$ se pintan de blanco y el resto se pinta de negro. Generar dicha imagen sería imposible de no ser por el siguiente teorema, entre otros.

TEOREMA 6: Si la órbita del cero escapa a infinito entonces $J(E_\lambda) = \mathbb{C}$.

Al generar la imagen en cuestión lo que hacemos es estudiar la órbita del cero con la función $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ para un determinado valor de λ . Si la órbita del cero escapa a infinito entonces $J(E_\lambda) = \mathbb{C}$ y se pinta el punto λ de blanco, de lo contrario se pinta de negro. De nuevo no hay un criterio que nos garantice que la órbita del cero escapa a infinito, y tan solo se pueden generar imágenes aproximadas asumiendo que si la órbita del cero en algún momento tiene parte real mayor que 50 entonces la órbita escapa. Existe también otra dificultad pues el teorema 6 no garantiza que si $J(E_\lambda) = \mathbb{C}$, la órbita del cero escapa a infinito. Sin embargo, se puede demostrar que la imagen generada de esta manera es una muy buena aproximación del espacio de parámetros.

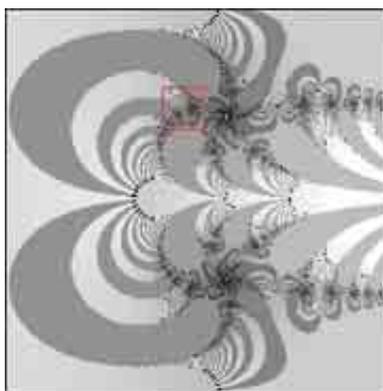


Figura 26. Detalle

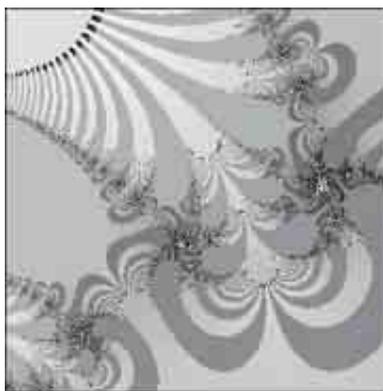


Figura 27. Detalle



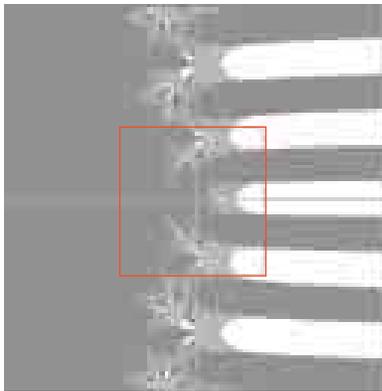


Figura 28. Espacio de parámetros



Figura 32.

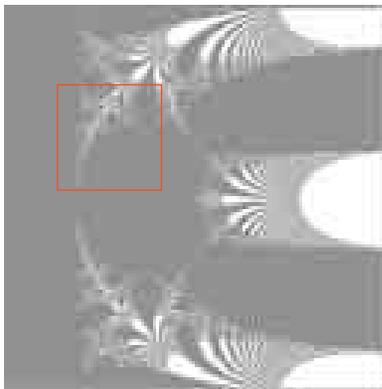


Figura 29. Detalle

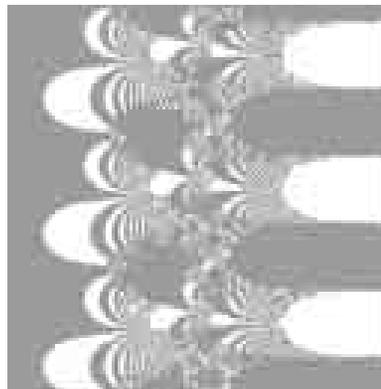


Figura 33. $J(E_\lambda)$ con $\lambda = 2.73 - 3.94i$

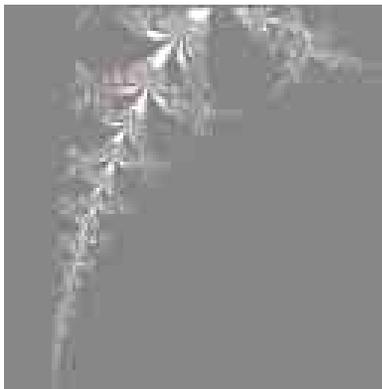


Figura 30. Detalle



Figura 34.

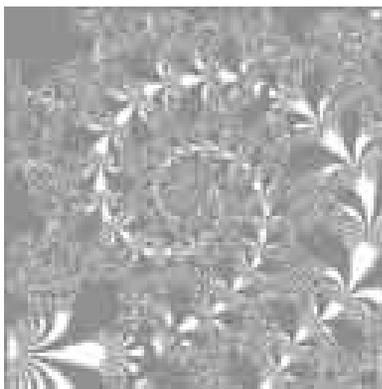


Figura 31. Detalle

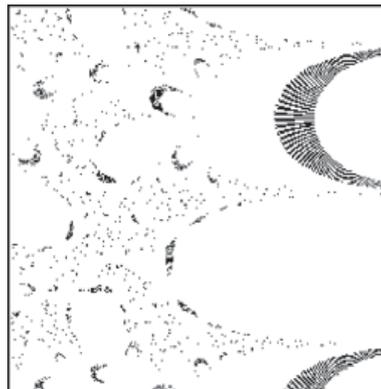


Figura 35. $J(E_\lambda)$ con $\lambda = 0.44 - 3.17i$

En las imágenes siguientes la región blanca es una aproximación del conjunto de los puntos λ tales que $J(E_\lambda) = C$. De nuevo debemos recalcar que las regiones blancas realmente se encuentran “llenas” de líneas.

Finalizamos con una serie de imágenes emparejadas (figuras 32 a 35). En la primera imagen de cada pareja aparece el espacio de parámetros y un valor de λ marcado en rojo, y en la segunda el conjunto de Julia $J(E_\lambda)$ de la función asociada a dicho valor de λ .

Nota: Las imágenes del artículo fueron generadas por el autor utilizando el programa *UltraFractal 3*, de Frederik Slijkerman.

> Referencias

- [1] R. L. Devaney, *Cantor Bouquets, Explosions and Knaster Continua* <http://math.bu.edu/people/bob/papers.html#bouquets> (Boston University, Boston, 1998).
- [2] C. Bodelon, R. L. Devaney, M. Hayes & G. Roberts. *Hairs of the Complex Exponential Family* <http://math.bu.edu/people/bob/papers.html#hairs> (Boston University, Boston, 1998).
- [3] R. L. Devaney. Cantor and Sierpinski, Julia and Fatou. Complex Topology Meets Complex Dynamics. *Notices of the American Mathematical Society* **51**, 9-15 <http://math.bu.edu/people/bob/papers.html#xctop> (2004).
- [4] M. Romera, G. Pastor, G. Álvarez & F. Montoya. *Growth in Complex Exponential Dynamics* <http://www.iec.csic.es/~miguel/Preprints.html> (Instituto de Física Aplicada, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2004).

> Reseña del autor

Enrique Acosta Jaramillo.
 en-acost@uniandes.edu.co
 Estudiante de último semestre de Matemáticas, Universidad de los Andes

