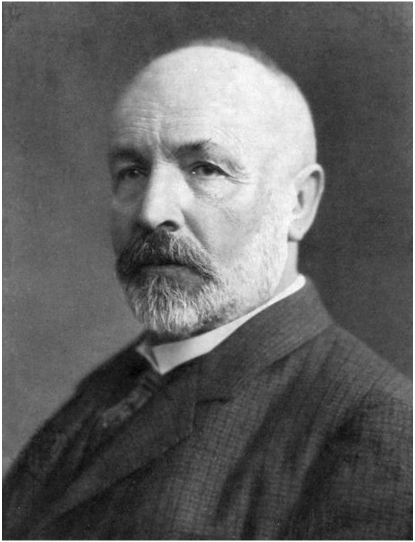
Los infinitos en el mundo de las Matemáticas: Cardinales y Ordinales.

Enrique Acosta Jaramillo

Escuela Nacional de Instructores Rodoflo Martínez Tono
Servicio Nacional de Aprendizaje SENA

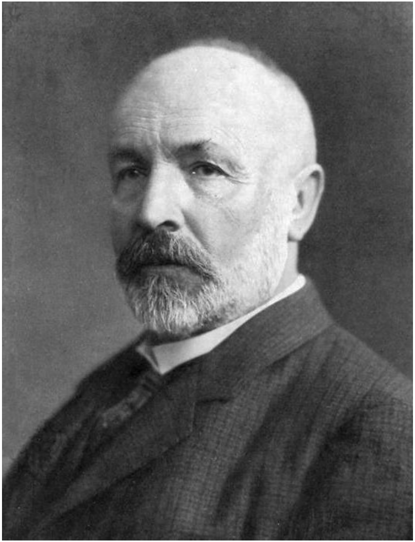
Julio 2014

Los Cardinales de Georg Cantor



1845 - 1918

Los Cardinales de Georg Cantor

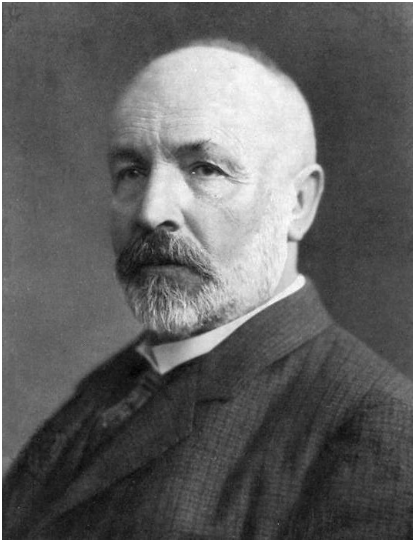


1845 - 1918

Pregunta:

¿Hay más sillas, o personas en este auditorio?

Los Cardinales de Georg Cantor



1845 - 1918

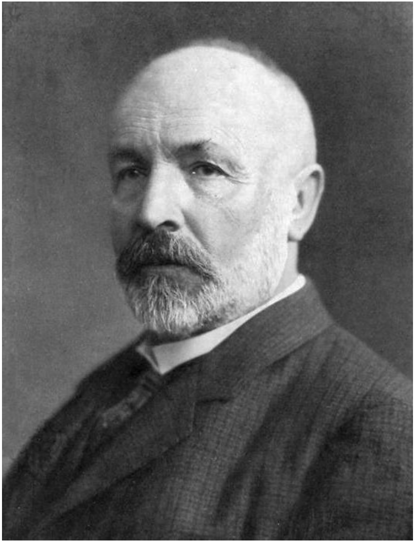
Pregunta:

¿Hay más sillas, o personas en este auditorio?

Cantor definió:

Dos conjuntos tienen el mismo **cardinal** ("tamaño") si sus elementos se pueden emparejar de forma tal que no sobre ninguno.

Los Cardinales de Georg Cantor



1845 - 1918

Pregunta:

¿Hay más sillas, o personas en este auditorio?

Cantor definió:

Dos conjuntos tienen el mismo **cardinal** ("tamaño") si sus elementos se pueden emparejar de forma tal que no sobre ninguno.

En términos matemáticos:

... si existe una función biyectiva entre los dos conjuntos.

Pregunta 1: ¿Son del mismo tamaño?

Pregunta 1: ¿Son del mismo tamaño?

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad y \qquad \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

Pregunta 1: ¿Son del mismo tamaño?

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\} \qquad y \qquad \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$$

¡SI!

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

Pregunta 1: ¿Son del mismo tamaño?

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\} \qquad y \qquad \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$$

¡SI!

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

Comentarios:

- ¡Tienen el mismo cardinal aunque parece que uno es mas grande que el otro!

Pregunta 1: ¿Son del mismo tamaño?

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad y \qquad \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

¡SI!

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

Comentarios:

- ¡Tienen el mismo cardinal aunque parece que uno es mas grande que el otro!
- El emparejamiento se puede escribir como una función:

$$f(n) = n - 1$$

- El hotel infinito....

Pregunta 2: ¿Son del mismo tamaño?

$$\text{Naturales} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad y \qquad \text{Pares} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

Pregunta 2: ¿Son del mismo tamaño?

$$\text{Naturales} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad y \qquad \text{Pares} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

¡SI!

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & ? & \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \ldots \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & & 84 &
\end{array}$$

Pregunta 2: ¿Son del mismo tamaño?

$$\text{Naturales} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad y \qquad \text{Pares} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

¡SI!

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & ? & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & & 84 & \end{array}$$

Comentarios:

- ¡Tienen el mismo cardinal aunque parece que uno es mas grande que el otro!
- El emparejamiento se puede escribir como una función:

$$f(n) = 2 \times n$$

- El hotel infinito....

Pregunta 3: ¿Son del mismo tamaño?

- Naturales $= \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Enteros $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (infinito en ambas direcciones)

Pregunta 3: ¿Son del mismo tamaño?

- Naturales $= \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Enteros $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (infinito en ambas direcciones)

¡SI!

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 103 & \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & & ? &
\end{array}$$

Pregunta 3: ¿Son del mismo tamaño?

- Naturales $= \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Enteros $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (infinito en ambas direcciones)

¡SI!

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 103 & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & & ? & \end{array}$$

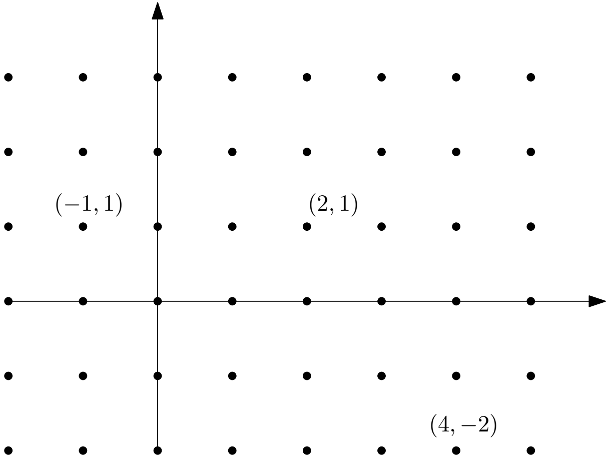
Comentarios:

- ¡Tienen el mismo cardinal aunque parece que uno es mas grande que el otro!
- Tarea: El emparejamiento se puede escribir como una función

$$f(n) = ??$$

Pregunta 4: ¿Son del mismo tamaño?

- Naturales $= \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Puntos en el plano con coordenadas enteras:

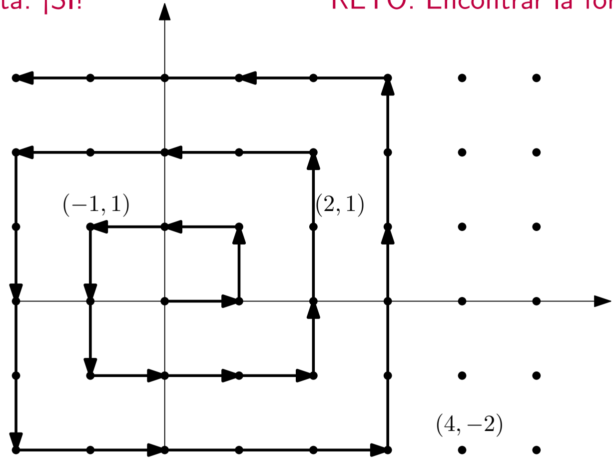


Pregunta 4 ¿Son del mismo tamaño?

- Naturales $= \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Puntos en el plano con coordenadas enteras:

Respuesta: ¡SI!

RETO: Encontrar la fórmula



Pregunta 5: ¿Son del mismo tamaño?

- $\mathbb{N}$ = Naturales = $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Los números racionales (las fracciones, por ejemplo $2/3$, $-134/67$)

Pregunta 5: ¿Son del mismo tamaño?

- $\mathbb{N}$ = Naturales = $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Los números racionales (las fracciones, por ejemplo $2/3$, $-134/67$)

Respuesta

¡Si!
¡Tienen el mismo cardinal!

¿Todos los conjuntos tienen el mismo Cardinal?

¿Todos los conjuntos tienen el mismo Cardinal?

Cantor: ¡NO!

El argumento de la diagonal de Cantor

Cantor: El Cardinal de $[0, 1]$ (los números reales entre 0 y 1) es mayor que el cardinal de los números Naturales $\mathbb{N}$.

El argumento de la diagonal de Cantor

Cantor: El Cardinal de $[0,1]$ (los números reales entre 0 y 1) es mayor que el cardinal de los números Naturales $\mathbb{N}$.

- Primero: El cardinal de $\mathbb{N}$ es menor o igual que el cardinal de $[0,1]$.

El argumento de la diagonal de Cantor

Cantor: El Cardinal de $[0,1]$ (los números reales entre 0 y 1) es mayor que el cardinal de los números Naturales $\mathbb{N}$.

- Primero: El cardinal de $\mathbb{N}$ es menor o igual que el cardinal de $[0,1]$. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 0,1 \\
2 & \longrightarrow & 0,2 \\
3 & \longrightarrow & 0,3 \\
\vdots & & \vdots \\
546 & \longrightarrow & 0,546 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

El argumento de la diagonal de Cantor

Cantor: El Cardinal de $[0,1]$ (los números reales entre 0 y 1) es mayor que el cardinal de los números Naturales $\mathbb{N}$.

- Primero: El cardinal de $\mathbb{N}$ es menor o igual que el cardinal de $[0,1]$. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 0,1 \\
2 & \longrightarrow & 0,2 \\
3 & \longrightarrow & 0,3 \\
\vdots & & \vdots \\
546 & \longrightarrow & 0,546 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

- Luego

$$\text{Cardinal de } \mathbb{N} \leq \text{Cardinal de } [0,1]$$

El argumento de la diagonal de Cantor

Cantor: El Cardinal de $[0,1]$ (los números reales entre 0 y 1) es mayor que el cardinal de los números Naturales $\mathbb{N}$.

- Primero: El cardinal de $\mathbb{N}$ es menor o igual que el cardinal de $[0,1]$. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 0,1 \\
2 & \longrightarrow & 0,2 \\
3 & \longrightarrow & 0,3 \\
\vdots & & \vdots \\
546 & \longrightarrow & 0,546 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

- Luego

$$\text{Cardinal de } \mathbb{N} \leq \text{Cardinal de } [0,1]$$

- Cantor mostró que no pueden ser iguales con el argumento de la diagonal.

El argumento de la diagonal de Cantor

- Sólo nos toca mostrar que los cardinales no son iguales.

El argumento de la diagonal de Cantor

- Sólo nos toca mostrar que los cardinales no son iguales.
- Supongamos que SI son iguales (si llegamos a un absurdo, ¡significa que no pueden ser iguales!).

El argumento de la diagonal de Cantor

- Sólo nos toca mostrar que los cardinales no son iguales.
- Supongamos que SI son iguales (si llegamos a un absurdo, ¡significa que no pueden ser iguales!).
- Si asumimos que son iguales los cardinales, entonces hay un emparejamiento entre los elemento de los conjuntos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ \ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\ 3\ 3\ 9\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 5\ 0\ 1\ 1\ \ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9\ \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

- Cantor nos muestra como construir un número que no está en el emparejamiento....

El argumento de la diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}\textcolor{red}{1}\;4\;1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\;\textcolor{red}{3}\;3\;9\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\;0\;\textcolor{red}{0}\;0\;0\;0\;3\;5\;0\;1\;1\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\;4\;1\;\textcolor{red}{5}\;9\;2\;6\;5\;3\;5\;9\ldots \\
\vdots & & \;\;\vdots
\end{array}
$$

Construimos un número que no sale en la lista así:

El argumento de la diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}\textcolor{red}{1}\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ \ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\ \textcolor{red}{3}\ 3\ 9\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\ 0\ \textcolor{red}{0}\ 0\ 0\ 0\ 3\ 5\ 0\ 1\ 1\ \ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\ 4\ 1\ \textcolor{red}{5}\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9\ \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Construimos un número que no sale en la lista así:

- Elegimos el primer decimal distinto al del primer número.

El argumento de la diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}\textcolor{red}{1}\;4\;1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\;\textcolor{red}{3}\;3\;9\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\;0\;\textcolor{red}{0}\;0\;0\;0\;3\;5\;0\;1\;1\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\;4\;1\;\textcolor{red}{5}\;9\;2\;6\;5\;3\;5\;9\ldots \\
\vdots & & \;\vdots
\end{array}
$$

Construimos un número que no sale en la lista así:

- Elegimos el primer decimal distinto al del primer número.
- Elegimos el segundo decimal distinto al del segundo número.

El argumento de la diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}\color{red}{1}\,4\,1\,4\,1\,4\,1\,4\,1\,4\,1\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\,\color{red}{3}\,3\,9\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\,0\,\color{red}{0}\,0\,0\,0\,3\,5\,0\,1\,1\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\,4\,1\,\color{red}{5}\,9\,2\,6\,5\,3\,5\,9\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Construimos un número que no sale en la lista así:

- Elegimos el primer decimal distinto al del primer número.
- Elegimos el segundo decimal distinto al del segundo número.
- Elegimos el tercer decimal distinto al del tercer número.
- etc.

Por ejemplo:

$$0,3516\ldots$$

El argumento de la diagonal de Cantor

$$\begin{array}{ccc}
1 & \longleftrightarrow & 0,\color{red}{1}\;4\;1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0,0\;\color{red}{3}\;3\;9\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0,7\;0\;\color{red}{0}\;0\;0\;0\;3\;5\;0\;1\;1\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0,1\;4\;1\;\color{red}{5}\;9\;2\;6\;5\;3\;5\;9\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

$$\color{blue}{0,3516\ldots}$$

¡El número azul no sale en la lista!

El argumento de la diagonal de Cantor

$$\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}\textcolor{red}{1}\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ \ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\ \textcolor{red}{3}\ 3\ 9\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\ 0\ \textcolor{red}{0}\ 0\ 0\ 0\ 3\ 5\ 0\ 1\ 1\ \ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\ 4\ 1\ \textcolor{red}{5}\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9\ \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

$$\textcolor{blue}{0,3516\ldots}$$

¡El número azul no sale en la lista!

- Es distinto al número emparejado con 1, porque el primer decimal es distintos.

El argumento de la diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\;4\;1\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\;3\;3\;9\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\;0\;0\;0\;0\;0\;3\;5\;0\;1\;1\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\;4\;1\;5\;9\;2\;6\;5\;3\;5\;9\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$0{,}3516\ldots$$

¡El número azul no sale en la lista!

- Es distinto al número emparejado con 1, porque el primer decimal es distintos.
- Es distinto al número emparejado con 2, porque el segundo decimal es distinto.

El argumento de la diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}\textcolor{red}{1}\,4\,1\,4\,1\,4\,1\,4\,1\,4\,1\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\,\textcolor{red}{3}\,3\,9\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\,0\,\textcolor{red}{0}\,0\,0\,0\,3\,5\,0\,1\,1\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\,4\,1\,\textcolor{red}{5}\,9\,2\,6\,5\,3\,5\,9\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$\textcolor{blue}{0,3516\ldots}$$

¡El número azul no sale en la lista!

- Es distinto al número emparejado con 1, porque el primer decimal es distintos.
- Es distinto al número emparejado con 2, porque el segundo decimal es distinto.
- ...etc .

El argumento de la diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}\textcolor{red}{1}\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ \ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\ \textcolor{red}{3}\ 3\ 9\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\ 0\ \textcolor{red}{0}\ 0\ 0\ 0\ 3\ 5\ 0\ 1\ 1\ \ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\ 4\ 1\ \textcolor{red}{5}\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9\ \ldots \\
\vdots & & \quad\vdots
\end{array}
$$

$$0,3516\ldots$$

- ¡Pero esto no tiene sentido! Se supone que todos los números estaban emparejados. ¡El número $0,3516\ldots$ debería estar emparejado!

El argumento de la diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longleftrightarrow & 0{,}1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1 \ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0{,}0\ 3\ 3\ 9\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0{,}7\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 5\ 0\ 1\ 1 \ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0{,}1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9 \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$0,3516\ldots$$

- ¡Pero esto no tiene sentido! Se supone que todos los números estaban emparejados. ¡El número $0,3516\ldots$ debería estar emparejado!
- Esta contradicción muestra que el emparejamiento no podía existir en un principio.

El argumento de la diagonal de Cantor

Lo más importante es lo siguiente:

El argumento de la diagonal de Cantor

Lo más importante es lo siguiente:

- Lo mismo se puede hacer con cualquier emparejamiento que nos den que pretende ser completo...siempre vamos a poder construir un número que no está en esa lista con la misma estrategia.

El argumento de la diagonal de Cantor

Lo más importante es lo siguiente:

- Lo mismo se puede hacer con cualquier emparejamiento que nos den que pretende ser completo...siempre vamos a poder construir un número que no está en esa lista con la misma estrategia.
- Es decir, no puede existir ningún emparejamiento entre los números naturales $\mathbb{N}$ y los números reales entre 0 y 1.

El argumento de la diagonal de Cantor

Lo más importante es lo siguiente:

- Lo mismo se puede hacer con cualquier emparejamiento que nos den que pretende ser completo…siempre vamos a poder construir un número que no está en esa lista con la misma estrategia.
- Es decir, no puede existir ningún emparejamiento entre los números naturales $\mathbb{N}$ y los números reales entre 0 y 1.
- En otras palabras, los cardinales de los dos conjuntos no pueden ser iguales.

El argumento de la diagonal de Cantor

Lo más importante es lo siguiente:

- Lo mismo se puede hacer con cualquier emparejamiento que nos den que pretende ser completo...siempre vamos a poder construir un número que no está en esa lista con la misma estrategia.
- Es decir, no puede existir ningún emparejamiento entre los números naturales $\mathbb{N}$ y los números reales entre 0 y 1.
- En otras palabras, los cardinales de los dos conjuntos no pueden ser iguales.

¡Hay más de un infinito!

Cardinal de $\mathbb{N} <$ Cardinal de $[0, 1]$

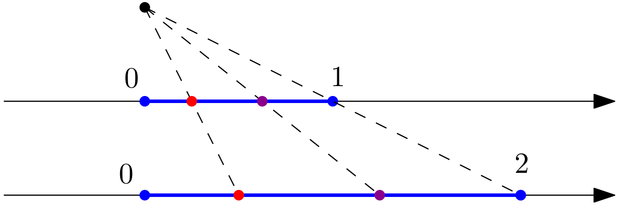
Pregunta 5 ¿Tienen el mismo cardinal?

- $[0, 1]$: Todos los números reales entre 0 y 1
- $[0, 2]$: Todos los números reales entre 0 y 2

Pregunta 5 ¿Tienen el mismo cardinal?

- $[0, 1]$: Todos los números reales entre 0 y 1
- $[0, 2]$: Todos los números reales entre 0 y 2

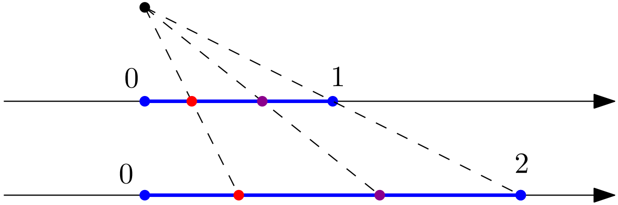
¡SI!



Pregunta 5 ¿Tienen el mismo cardinal?

- $[0,1]$: Todos los números reales entre 0 y 1
- $[0,2]$: Todos los números reales entre 0 y 2

¡SI!

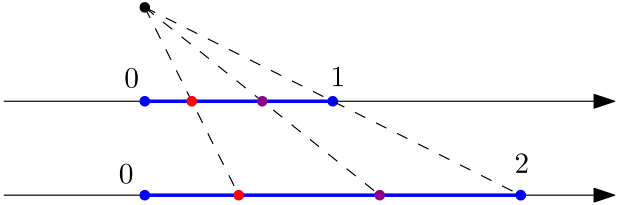


- El emparejamiento también se puede escribir como una función:

Pregunta 5 ¿Tienen el mismo cardinal?

- $[0,1]$: Todos los números reales entre 0 y 1
- $[0,2]$: Todos los números reales entre 0 y 2

¡SI!



- El emparejamiento también se puede escribir como una función:

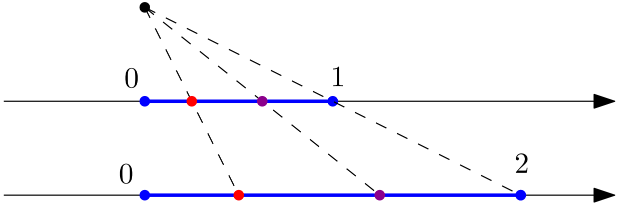
$$f(x) = 2x$$

para ir de $[0,1]$ a $[0,2]$.

Pregunta 5 ¿Tienen el mismo cardinal?

- $[0,1]$: Todos los números reales entre 0 y 1
- $[0,2]$: Todos los números reales entre 0 y 2

¡SI!



- El emparejamiento también se puede escribir como una función:

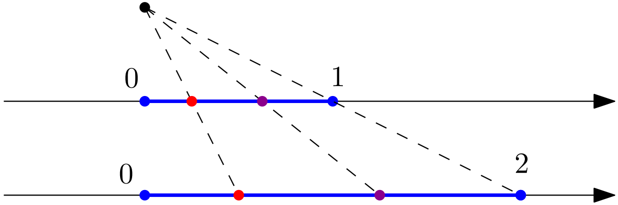
$$f(x) = 2x$$

para ir de $[0,1]$ a $[0,2]$. Y para ir en el sentido opuesto:

Pregunta 5 ¿Tienen el mismo cardinal?

- $[0, 1]$: Todos los números reales entre 0 y 1
- $[0, 2]$: Todos los números reales entre 0 y 2

¡SI!



- El emparejamiento también se puede escribir como una función:

$$f(x) = 2x$$

para ir de $[0, 1]$ a $[0, 2]$. Y para ir en el sentido opuesto:

$$g(x) = \frac{x}{2}$$

El Cardinal de continuo

- En general, cualquier intervalo $[a, b]$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$. RETO: !Escribir las funciones!

El Cardinal de continuo

- En general, cualquier intervalo $[a, b]$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$. RETO: !Escribir las funciones!
- Incluso, ¡el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$!

El Cardinal de continuo

- En general, cualquier intervalo $[a, b]$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$. RETO: !Escribir las funciones!
- Incluso, ¡el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$!
- A este Cardinal se le llama el Cardinal del continuo.

Cardinal del continuo
$=$ Cardinal de $\mathbb{R}$
$=$ Cardinal de cualquier intervalo $[a, b]$

El Cardinal de continuo

- En general, cualquier intervalo $[a, b]$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$. RETO: !Escribir las funciones!
- Incluso, ¡el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$!
- A este Cardinal se le llama el Cardinal del continuo.

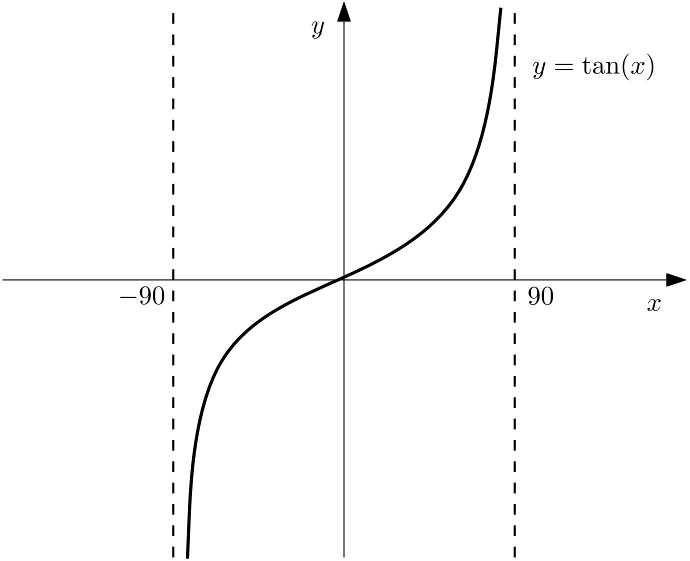
$$\begin{gathered}\text{Cardinal del continuo}\\ = \text{Cardinal de } \mathbb{R}\\ = \text{Cardinal de cualquier intervalo } [a, b]\end{gathered}$$

Este Cardinal es estrictamente mayor que el Cardinal de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$\text{Cardinal de } \mathbb{N} < \text{Cardinal de } \mathbb{R}$$

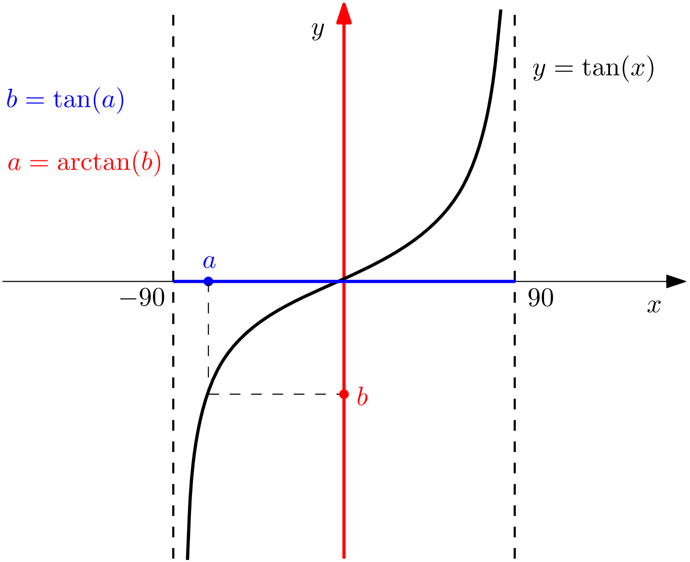
El Cardinal de continuo

¡El emparejamiento entre $(-90, 90)$ y $\mathbb{R}$ está en sus calculadoras!



El Cardinal de continuo

¡El emparejamiento entre $(-90, 90)$ y $\mathbb{R}$ está en sus calculadoras!



Los Cardinales: Los Alephs

- El Cardinal de los números naturales: $\aleph_0$.

Los Cardinales: Los Alephs

- El Cardinal de los números naturales: $\aleph_0$.
- Este es Cardinal infinito "más pequeño".

Los Cardinales: Los Alephs

- El Cardinal de los números naturales: $\aleph_0$.
- Este es Cardinal infinito "más pequeño".
- Cantor: ¡Siempre hay un siguiente cardinal más grande!

Los Cardinales: Los Alephs

- El Cardinal de los números naturales: $\aleph_0$.
- Este es Cardinal infinito "más pequeño".
- Cantor: ¡Siempre hay un siguiente cardinal más grande!
- Es decir,

¡Hay infinitos infinitos!

Los Cardinales: Los Alephs

- El Cardinal de los números naturales: $\aleph_0$.
- Este es Cardinal infinito "más pequeño".
- Cantor: ¡Siempre hay un siguiente cardinal más grande!
- Es decir,

¡Hay infinitos infinitos!

- El siguiente Cardinal después de $\aleph_0$:

Los Cardinales: Los Alephs

- El Cardinal de los números naturales: $\aleph_0$.
- Este es Cardinal infinito "más pequeño".
- Cantor: ¡Siempre hay un siguiente cardinal más grande!
- Es decir,

¡Hay infinitos infinitos!

- El siguiente Cardinal después de $\aleph_0$: $\aleph_1$.

Los Cardinales: Los Alephs

- El Cardinal de los números naturales: $\aleph_0$.
- Este es Cardinal infinito "más pequeño".
- Cantor: ¡Siempre hay un siguiente cardinal más grande!
- Es decir,

¡Hay infinitos infinitos!

- El siguiente Cardinal después de $\aleph_0$: $\aleph_1$.
- Los Cardinales infinitos:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots$$

¡Sigue sin parar!

Los Cardinales: Los Alephs

- El Cardinal de los números naturales: $\aleph_0$.
- Este es Cardinal infinito "más pequeño".
- Cantor: ¡Siempre hay un siguiente cardinal más grande!
- Es decir,

¡Hay infinitos infinitos!

- El siguiente Cardinal después de $\aleph_0$: $\aleph_1$.
- Los Cardinales infinitos:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots$$

  ¡Sigue sin parar!
- Más adelante seguimos con esto....

La Hipótesis del Continuo

Pregunta de Cantor:

El Cardinal del continuo (de los números reales) debe ser un $\aleph_{\_}$.
¿Cuál?

La Hipótesis del Continuo

Pregunta de Cantor:

El Cardinal del continuo (de los números reales) debe ser un $\aleph_{-}$.
¿Cuál?

- ¿ Es $\aleph_1$?

La Hipótesis del Continuo

Pregunta de Cantor:

El Cardinal del continuo (de los números reales) debe ser un $\aleph_{-}$.
¿Cuál?

- ¿ Es $\aleph_1$?
- ¿ Es $\aleph_{20}$?

La Hipótesis del Continuo

Pregunta de Cantor:

El Cardinal del continuo (de los números reales) debe ser un $\aleph_{-}$. ¿Cuál?

- ¿ Es $\aleph_1$?
- ¿ Es $\aleph_{20}$?
- ¿ Es $\aleph_{30000}$?

La Hipótesis del Continuo

Pregunta de Cantor:

El Cardinal del continuo (de los números reales) debe ser un $\aleph_{-}$. ¿Cuál?

- ¿ Es $\aleph_1$?
- ¿ Es $\aleph_{20}$?
- ¿ Es $\aleph_{30000}$?

?

La Hipótesis del Continuo

Pregunta de Cantor:

El Cardinal del continuo (de los números reales) debe ser un $\aleph_{-}$.
¿Cuál?

- ¿ Es $\aleph_1$?
- ¿ Es $\aleph_{20}$?
- ¿ Es $\aleph_{30000}$?

?

- Cantor pensaba que era $\aleph_1$.

La Hipótesis del Continuo

Pregunta de Cantor:

El Cardinal del continuo (de los números reales) debe ser un $\aleph_{-}$. ¿Cuál?

- ¿ Es $\aleph_1$?
- ¿ Es $\aleph_{20}$?
- ¿ Es $\aleph_{30000}$?

?

- Cantor pensaba que era $\aleph_1$.
- Cantor nunca logró responder su pregunta.... esto le causó ataques de depresión a lo largo de la vida.

La Hipótesis del Continuo

Pregunta de Cantor:

El Cardinal del continuo (de los números reales) debe ser un $\aleph_{-}$. ¿Cuál?

- ¿ Es $\aleph_1$?
- ¿ Es $\aleph_{20}$?
- ¿ Es $\aleph_{30000}$?

?

- Cantor pensaba que era $\aleph_1$.
- Cantor nunca logró responder su pregunta.... esto le causó ataques de depresión a lo largo de la vida.
- En 1963 (45 años después de la muerte de Cantor) el matemático Paul Cohen mostró que no hoy respuesta a la pregunta de Cantor.

La Hipótesis del Continuo

¿Cuál $\aleph$ es el cardinal de los números reales?

¡No hay respuesta!

...No es que no sepamos cuál es la respuesta todavía...

La Hipótesis del Continuo

¿Cuál $\aleph$ es el cardinal de los números reales?

¡No hay respuesta!

...No es que no sepamos cuál es la respuesta todavía...

¡NO HAY RESPUESTA!

La Hipótesis del Continuo

¿Cuál $\aleph$ es el cardinal de los números reales?

¡No hay respuesta!

...No es que no sepamos cuál es la respuesta todavía...

¡NO HAY RESPUESTA!

- Las matemáticas no nos dan la respuesta. ¡No son absolutas!

La Hipótesis del Continuo

¿Cuál $\aleph$ es el cardinal de los números reales?

¡No hay respuesta!

...No es que no sepamos cuál es la respuesta todavía...

¡NO HAY RESPUESTA!

- Las matemáticas no nos dan la respuesta. ¡No son absolutas!
- Podemos elegir cual es la respuesta..., pero cada una determina "matemáticas" distintas.

PAUSA ACTIVA

Los Ordinales

Un juego:

- ¿Cuál es el número natural más grande?

Los Ordinales

Un juego:

- ¿Cuál es el número natural más grande?
- ¡Uno siempre puede decir un número más grande!

Los Ordinales

Un juego:

- ¿Cuál es el número natural más grande?
- ¡Uno siempre puede decir un número más grande!
- Cantor no paró donde todos paramos....

Los Ordinales

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Los Ordinales

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega$

Los Ordinales

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega, \omega+1$

Los Ordinales

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega\ , \omega + 1, \omega + 2$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \dots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2$$

Los Ordinales

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega\ , \omega+1, \omega+2, \omega+3\ , \ldots, \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1, \omega\cdot 2+2, \omega\cdot 2+3, \ldots$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \dots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \dots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \dots$$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \dots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \dots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \dots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \dots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \dots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \dots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \dots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \dots$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \dots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \dots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \dots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \dots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \dots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \dots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \dots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \dots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3$$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$
$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$
$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$
$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots$

Los Ordinales

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega\ , \omega+1, \omega+2, \omega+3\ , \ldots, \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1, \omega\cdot 2+2, \omega\cdot 2+3, \ldots, \omega\cdot 3\ , \omega\cdot 3+1, \omega\cdot 3+2, \ldots,$
$\omega\cdot 4\ , \ldots, \omega\cdot 5\ , \ldots, \omega\cdot\omega := \omega^2\ , \omega^2+1, \omega^2+2, \ldots, \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1, \ldots, \omega^2+\omega\cdot 2\ , \ldots, \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ , \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2, \ldots, \omega^2\cdot 2+\omega, \ldots, \omega^2\cdot 3, \ldots, \omega^3\ , \omega^3+1, \ldots, \omega^4,$
$\ldots, \omega^5, \ldots, \omega^\omega\ , \omega^\omega+1, \ldots, \omega^{\omega\cdot 2}$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$$
$$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}$$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$
$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$
$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$
$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$
$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \dots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \dots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \dots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \dots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \dots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \dots,\ \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1,\ \dots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \dots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2,\ \dots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \dots,\ \omega^2\cdot 3,\ \dots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \dots,\ \omega^4,$
$\dots,\ \omega^5,\ \dots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \dots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \dots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \dots,\ ,$
$\omega^{\omega\cdot 4},\ \dots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \dots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \dots$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$
$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$
$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$$
$$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$$
$$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots\ ,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$$
$$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$$
$$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega}$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$$
$$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$$
$$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega}\ ,$$

$$\omega^{\omega^\omega}+1,\ \ldots$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$$
$$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$$
$$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega}\ ,$$

$$\omega^{\omega^\omega}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \ldots$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \dots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \dots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \dots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \dots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \dots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \dots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \dots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \dots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \dots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \dots,\ \omega^2\cdot 3,\ \dots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \dots,\ \omega^4,$$
$$\dots,\ \omega^5,\ \dots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \dots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \dots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \dots,\ ,$$
$$\omega^{\omega\cdot 4},\ \dots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \dots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \dots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \dots,\ \omega^{\omega^4},\ \dots,\ \omega^{\omega^\omega}\ ,$$

$$\omega^{\omega^\omega}+1,\ \dots,\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \dots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$$
$$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^{\omega}\ ,\ \omega^{\omega}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$$
$$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega}}\ ,$$

$$\omega^{\omega^{\omega}}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}\ ,\ \ldots$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$$
$$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$$
$$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega}\ ,$$
$$\omega^{\omega^\omega}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}$$

Los Ordinales

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$$
$$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$$
$$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$$
$$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$$
$$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$$
$$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega}\ ,$$
$$\omega^{\omega^\omega}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} = \varepsilon_0$$

Los Ordinales

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega+\omega =: \omega\cdot 2,$
$\omega\cdot 2+1, \omega\cdot 2+2, \omega\cdot 2+3, \ldots, \omega\cdot 3, \omega\cdot 3+1, \omega\cdot 3+2, \ldots,$
$\omega\cdot 4, \ldots, \omega\cdot 5, \ldots, \omega\cdot\omega := \omega^2, \omega^2+1, \omega^2+2, \ldots, \omega^2+\omega,$
$\omega^2+\omega+1, \ldots, \omega^2+\omega\cdot 2, \ldots, \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2, \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2, \ldots, \omega^2\cdot 2+\omega, \ldots, \omega^2\cdot 3, \ldots, \omega^3, \omega^3+1, \ldots, \omega^4,$
$\ldots, \omega^5, \ldots, \omega^\omega, \omega^\omega+1, \ldots, \omega^{\omega\cdot 2}, \omega^{\omega\cdot 2}+1, \ldots, \omega^{\omega\cdot 3}, \ldots, ,$
$\omega^{\omega\cdot 4}, \ldots, \omega^{\omega\cdot 5} \ldots, \omega^{\omega^2}, \omega^{\omega^2}+1, \ldots, \omega^{\omega^3}, \ldots, \omega^{\omega^4}, \ldots, \omega^{\omega^\omega},$
$\omega^{\omega^\omega}+1, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} = \varepsilon_0, \varepsilon_0+1,$
$\varepsilon_0+2, \ldots, \varepsilon_0+\omega, \ldots$

Los Ordinales

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ \omega\ ,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3\ ,\ \ldots,\ \omega+\omega =: \omega\cdot 2\ ,$
$\omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 2+2,\ \omega\cdot 2+3,\ \ldots,\ \omega\cdot 3\ ,\ \omega\cdot 3+1,\ \omega\cdot 3+2,\ \ldots,$
$\omega\cdot 4\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot 5\ ,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega := \omega^2\ ,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\ ,$
$\omega^2+\omega+1,\ \ldots,\ \omega^2+\omega\cdot 2\ ,\ \ldots,\ \omega^2+\omega^2 := \omega^2\cdot 2\ ,\ \omega^2\cdot 2+1,$
$\omega^2\cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 2+\omega,\ \ldots,\ \omega^2\cdot 3,\ \ldots,\ \omega^3\ ,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^4,$
$\ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \omega^\omega\ ,\ \omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 2}\ ,\ \omega^{\omega\cdot 2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 3}\ ,\ \ldots,\ ,$
$\omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot 5}\ \ldots,\ \omega^{\omega^2}\ ,\ \omega^{\omega^2}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^3}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^4},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega}\ ,$
$\omega^{\omega^\omega}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}\ ,\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}} = \varepsilon_0\ ,\ \varepsilon_0+1,$
$\varepsilon_0+2,\ \ldots,\ \varepsilon_0+\omega,\ \ldots$

. . . ... etc.

- Los Ordinales nos sirven para establecer un ORDEN. Son para contar, y no para ver tamaños.

Los Ordinales representan ordenes

$$
\begin{array}{rcl}
\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots & \cong & \omega \\
\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots\bullet & \cong & \omega+1 \\
\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\bullet & \cong & \omega+2 \\
 & \vdots & \\
\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\bullet\bullet\ldots & \cong & \omega+\omega \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

De los Ordinales a los Cardinales

$$1 < 2 < \ldots \omega < \omega{+}1 \ldots < \omega^{\omega} < \ldots < \varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} < \varepsilon_0{+}1 < \ldots$$

De los Ordinales a los Cardinales

$$1 < 2 < \ldots \omega < \omega{+}1 \ldots < \omega^{\omega} < \ldots < \varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} < \varepsilon_0{+}1 < \ldots$$

RETO: ¡El cardinal de todos estos es el cardinal de los naturales! (el cardinal de $\mathbb{N}$).

De los Ordinales a los Cardinales

$$1 < 2 < \ldots \omega < \omega{+}1 \ldots < \omega^{\omega} < \ldots < \varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} < \varepsilon_0{+}1 < \ldots$$

RETO: ¡El cardinal de todos estos es el cardinal de los naturales! (el cardinal de $\mathbb{N}$). Por ejemplo:

- Que ω y $\omega + 1$ tienen el miso cardinal es lo que vimos que

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad y \qquad \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

  tienen el mismo cardinal (que es $\aleph_0$).

De los Ordinales a los Cardinales

$$1 < 2 < \ldots \omega < \omega{+}1 \ldots < \omega^{\omega} < \ldots < \varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} < \varepsilon_0{+}1 < \ldots$$

RETO: ¡El cardinal de todos estos es el cardinal de los naturales! (el cardinal de $\mathbb{N}$). Por ejemplo:

- Que ω y $\omega + 1$ tienen el miso cardinal es lo que vimos que

  $$\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad y \qquad \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

  tienen el mismo cardinal (que es $\aleph_0$).
- $\omega + \omega$ tiene el mismo cardinal de ω:

  $$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \cdots$$
  $$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \cdots$$

  esto es lo mismo que vimos que $\{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tienen el mismo cardinal.

De los Ordinales a los Cardinales

$$1 < 2 < \ldots \omega < \omega{+}1 \ldots < \omega^{\omega} < \ldots < \varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} < \varepsilon_0{+}1 < \ldots$$

RETO: El cardinal de todos estos es el cardinal de los naturales! (el cardinal de $\mathbb{N}$). Por ejemplo:

- Que ω y $\omega + 1$ tienen el miso cardinal es lo que vimos que

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad y \qquad \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

  tienen el mismo cardinal (que es $\aleph_0$).
- $\omega + \omega$ tiene el mismo cardinal de ω:

$$\begin{array}{l} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \cdots \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \cdots \end{array}$$

  esto es lo mismo que vimos que $\{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tiene el mismo cardinal.

Los Alephs

Los Cardinales son lo Ordinales que no se pueden emparejar con sus antecesores.

- $\aleph_0 := \omega$ (el Cardinal de los números naturales $1, 2, 3, ..$
- $\aleph_1 :=$ el primer Ordinal que no se puede emparejar con $\aleph_0$

Los Alephs

Los Cardinales son lo Ordinales que no se pueden emparejar con sus antecesores.

- $\aleph_0 := \omega$ (el Cardinal de los números naturales $1, 2, 3, ..$
- $\aleph_1 :=$ el primer Ordinal que no se puede emparejar con $\aleph_0$ (sabemos que con el juego de sumar 1 nunca lo vamos a alcanzar, pero también sabemos que muy, muy, muy adelante está)

Los Alephs

Los Cardinales son lo Ordinales que no se pueden emparejar con sus antecesores.

- $\aleph_0 := \omega$ (el Cardinal de los números naturales $1, 2, 3, ..$
- $\aleph_1 :=$ el primer Ordinal que no se puede emparejar con $\aleph_0$ (sabemos que con el juego de sumar 1 nunca lo vamos a alcanzar, pero también sabemos que muy, muy, muy adelante está)
- $\aleph_2 :=$ El primer Ordinal que no se puede emparejar con $\aleph_1$

  $\vdots$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$

$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2}$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$\ldots$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$\ldots \ldots$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0}$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots\ldots\ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots\ldots\ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega}$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots \ldots \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_1}} < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_2}}$$

$$< \ldots \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_1}} < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_2}}$$

$$< \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}} < \ldots \ldots \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_1}} < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_2}}$$

$$< \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}} < \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}} \ (\aleph_0 \text{ veces}) < \ldots$$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_1}} < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_2}}$$

$$< \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}} < \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\ddots}}} \; (\aleph_0 \text{ veces}) < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\ddots}}} \; (\aleph_1 \text{ veces}) < \ldots$$

$\ldots$

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_1}} < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_2}}$$

$$< \ldots \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}} < \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}} \; (\aleph_0 \text{ veces}) < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}} \; (\aleph_1 \text{ veces}) < \ldots$$

…para SIEMPRE.

Los Alephs...de nuevo

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_{1000} < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2}$$

$$< \ldots < \aleph_{\omega+1000} < \ldots\ldots\ldots < \aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2} < \ldots < \aleph_{\omega\cdot 3} < \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots < \aleph_{\omega^2} < \aleph_{\omega^2+1} < \ldots < \aleph_{\varepsilon_0} < \ldots\ldots\ldots < \aleph_{\aleph_1}$$

$$< \aleph_{\aleph_1+1} < \aleph_{\aleph_1+2} < \ldots < \aleph_{\aleph_2} < \ldots < \aleph_{\aleph_3} < \ldots < \aleph_{\aleph_\omega} = \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$$

$$< \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1} < \aleph_{\aleph_{\aleph_0}+2} < \ldots < \ldots\ldots\ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_1}} < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_2}}$$

$$< \ldots\ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}} < \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}} \;(\aleph_0 \text{ veces}) < \ldots < \aleph_{\aleph_{\aleph_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}} \;(\aleph_1 \text{ veces}) < \ldots$$

. . . para SIEMPRE.

Esta cadena de infinitos es más larga que cualquier infinito....

Mas Información

- Introduction to set Theory, Thomas Jech and Karel Hrbacek.
- Set Theory, Thomas Jech.
- Set Theory, Kenneth Kunen.

Pregunta 5 ¿Son del mismo tamaño?

- $\mathbb{N}$ = Naturales = $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Los números racionales (las fracciones)

Pregunta 5 ¿Son del mismo tamaño?

- $\mathbb{N}$ = Naturales = $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Los números racionales (las fracciones)

Solución

- Comenzamos con

$$\text{Cardinal de } \mathbb{N} \leq \text{Cardinal de } \mathbb{Q}$$

Pregunta 5 ¿Son del mismo tamaño?

- $\mathbb{N}$ = Naturales = $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Los números racionales (las fracciones)

Solución

- Comenzamos con

$$\text{Cardinal de } \mathbb{N} \leq \text{Cardinal de } \mathbb{Q}$$

- Pero de cada punto del plano con coordenadas enteras podemos sacar una fracción:

$$(a, b) \bullet \longrightarrow \frac{a}{b}$$

Pregunta 5 ¿Son del mismo tamaño?

- $\mathbb{N}$ = Naturales = $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Los números racionales (las fracciones)

Solución

- Comenzamos con

$$\text{Cardinal de } \mathbb{N} \leq \text{Cardinal de } \mathbb{Q}$$

- Pero de cada punto del plano con coordenadas enteras podemos sacar una fracción:

$$(a, b) \bullet \longrightarrow \frac{a}{b}$$

- Luego, el cardinal de $\mathbb{Q}$ es menor que el cardinal de los puntos en el plano con coordenadas enteras, que sabemos que es igual al de $\mathbb{N}$!

Pregunta 5 ¿Son del mismo tamaño?

- $\mathbb{N}$ = Naturales = $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Los números racionales (las fracciones)

Solución

- Comenzamos con

$$\text{Cardinal de } \mathbb{N} \leq \text{Cardinal de } \mathbb{Q}$$

- Pero de cada punto del plano con coordenadas enteras podemos sacar una fracción:

$$(a, b) \bullet \longrightarrow \frac{a}{b}$$

- Luego, el cardinal de $\mathbb{Q}$ es menor que el cardinal de los puntos en el plano con coordenadas enteras, que sabemos que es igual al de $\mathbb{N}$!
- ¡Tienen el mismo cardinal!