Tetraedros Racionales

Tesis de Maestría

Enrique Acosta

Director: Ronald van Luijk

Codirector: Alf Onshuus

Departamento de Matemáticas

Universidad de los Andes

Mayo 18, 2007

Fibras Genéricas

Fibras Genéricas

Sean V y W dos variedades y $\sigma : V \to W$ un morfismo.

- La fibra de σ sobre $P \in W$: $\sigma^{-1}(P)$.

Fibras Genéricas

Sean V y W dos variedades y $\sigma : V \to W$ un morfismo.

- La fibra de σ sobre $P \in W$: $\sigma^{-1}(P)$.
- V y W se pueden ver como esquemas y σ como un morfismo de esquemas.
- A las fibras de σ se les puede dar estuctura de esquema.

Fibras Genéricas

Sean V y W dos variedades y $\sigma : V \to W$ un morfismo.

- La fibra de σ sobre $P \in W$: $\sigma^{-1}(P)$.
- V y W se pueden ver como esquemas y σ como un morfismo de esquemas.
- A las fibras de σ se les puede dar estuctura de esquema.
- Si V y W son afines, sus esquemas asociados son Spec $A(V)$ y Spec $A(W)$.

Fibras Genéricas

Sean V y W dos variedades y $\sigma : V \to W$ un morfismo.

- La fibra de σ sobre $P \in W$: $\sigma^{-1}(P)$.
- V y W se pueden ver como esquemas y σ como un morfismo de esquemas.
- A las fibras de σ se les puede dar estuctura de esquema.
- Si V y W son afines, sus esquemas asociados son Spec $A(V)$ y Spec $A(W)$.
- Spec $A(W)$ tiene más puntos que W.

Fibras Genéricas

Sean V y W dos variedades y $\sigma : V \to W$ un morfismo.

- La fibra de σ sobre $P \in W$: $\sigma^{-1}(P)$.
- V y W se pueden ver como esquemas y σ como un morfismo de esquemas.
- A las fibras de σ se les puede dar estuctura de esquema.
- Si V y W son afines, sus esquemas asociados son Spec $A(V)$ y Spec $A(W)$.
- Spec $A(W)$ tiene más puntos que W.
  - Por ejemplo $(0) \in$ Spec $A(W)$.
  - (0) es denso en Spec $A(W)$.

Fibras Genéricas

Sean V y W dos variedades y $\sigma : V \to W$ un morfismo.

- La fibra de σ sobre $P \in W$: $\sigma^{-1}(P)$.
- V y W se pueden ver como esquemas y σ como un morfismo de esquemas.
- A las fibras de σ se les puede dar estuctura de esquema.
- Si V y W son afines, sus esquemas asociados son Spec $A(V)$ y Spec $A(W)$.
- Spec $A(W)$ tiene más puntos que W.
  - Por ejemplo $(0) \in$ Spec $A(W)$.
  - (0) es denso en Spec $A(W)$.
- La fibra de σ sobre (0): Una fibra que "habla por todas"...la *fibra genérica*.

Fibras Genéricas

Sea V una hipersuperficie en $\mathbb{A}_k^n$ con coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ definida por $f = 0$ donde $f \notin k[x_n]$. Sea σ la proyección

$$\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n.$$

Fibras Genéricas

Sea V una hipersuperficie en $\mathbb{A}_k^n$ con coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ definida por $f = 0$ donde $f \notin k[x_n]$. Sea σ la proyección

$$\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n.$$

- La fibra genérica de σ es

$$\text{Spec } k(x_n)[x_1, \ldots, x_{n-1}]/(f).$$

- Es decir, la hipersuperficie definida por f en $\mathbb{A}^{n-1}$ sobre el campo $k(x_n)$.

Fibras Genéricas

Sea V una hipersuperficie en $\mathbb{A}_k^n$ con coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ definida por $f = 0$ donde $f \notin k[x_n]$. Sea σ la proyección

$$\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n.$$

- La fibra genérica de σ es

$$\text{Spec } k(x_n)[x_1, \ldots, x_{n-1}]/(f).$$

- Es decir, la hipersuperficie definida por f en $\mathbb{A}^{n-1}$ sobre el campo $k(x_n)$.
- Los puntos en la fibra genérica se “especializan" a puntos en casi todas las fibras.

Fibras Genéricas

Sea V una hipersuperficie en $\mathbb{A}^n_k$ con coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ definida por $f = 0$ donde $f \notin k[x_n]$. Sea σ la proyección

$$\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n.$$

- La fibra genérica de σ es

$$\text{Spec } k(x_n)[x_1, \ldots, x_{n-1}]/(f).$$

- Es decir, la hipersuperficie definida por f en $\mathbb{A}^{n-1}$ sobre el campo $k(x_n)$.
- Los puntos en la fibra genérica se “especializan" a puntos en casi todas las fibras.
- Hay una correspondencia entre:

$$\text{Puntos en la fibra genérica} \longleftrightarrow \text{Secciones de } \sigma$$

Fibras Genéricas - Ejemplo

$$V: \; z^2 = x^2 - y^2 \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma : \quad V &\to \mathbb{A}^1 \\ (x, y, z) &\mapsto z. \end{aligned}$$

Fibras Genéricas - Ejemplo

$$V : \; z^2 = x^2 - y^2 \qquad\qquad \sigma : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ (x,y,z) & \longmapsto & z. \end{array}$$

Fibra genérica: Spec $k(z)[x,y]/(z^2 - x^2 + y^2)$

Es decir, la curva en $\mathbb{A}^2$ sobre el campo $k(z)$ definida por la misma ecuación.

Fibras Genéricas - Ejemplo

$$V : \ z^2 = x^2 - y^2 \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma : \qquad V \quad &\to \mathbb{A}^1 \\ (x,y,z) &\mapsto z. \end{aligned}$$

Fibra genérica: Spec $k(z)[x,y]/(z^2 - x^2 + y^2)$

Es decir, la curva en $\mathbb{A}^2$ sobre el campo $k(z)$ definida por la misma ecuación.

Ejemplos de puntos en la fibra genérica:

$$\begin{aligned} P_1 &= (z, 0) \\ P_2 &= (-z, 0) \\ P_3 &= (5z/3, 4z/3) \\ P_4 &= \left(\frac{z(z^2+1)}{z^2-1}, \frac{2z^2}{z^2-1} \right). \end{aligned}$$

El volumen de un tetraedro

- El volumen de un tetraedro está dado por:

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

donde A es el área de la base y h es la altura.

El volumen de un tetraedro

- El volumen de un tetraedro está dado por:

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

donde A es el área de la base y h es la altura.

- Relación entre el volumen y los lados:

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-\\ &\quad a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$

El volumen de un tetraedro

- El volumen de un tetraedro está dado por:

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

donde A es el área de la base y h es la altura.

- Relación entre el volumen y los lados:

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-\\ &\quad a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$

- *Tetraedro Racional:* Tetraedro con lados y volumen racionales.
- soluciones racionales a la ecuación?
- No toda solución racional es un tetraedro.

La naturaleza de la ecuación

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$

La naturaleza de la ecuación

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$

- Es homogénea en cierto sentido:

  Si (a,b,c,d,e,f,V) es solución, entonces

  $$(ka,kb,kc,kd,ke,kf,k^3V)$$

  es solución.

La naturaleza de la ecuación

$$
\begin{aligned}
(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\
&\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.
\end{aligned}
$$

- Es homogénea en cierto sentido:

  Si (a,b,c,d,e,f,V) es solución, entonces

  $$(ka,kb,kc,kd,ke,kf,k^3V)$$

  es solución.
- Es natural identificar estas soluciones como una sola:

  $$[a:b:c:d:e:f:V]$$

La naturaleza de la ecuación

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$

- $y = 12V$

Geometría Algebraíca

$$\begin{aligned} y^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+ \\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2. \end{aligned}$$

Geometría Algebraíca

$$\begin{aligned} y^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+ \\ & \quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2. \end{aligned}$$

- Define una variedad proyectiva con pesos:

$$X: \quad y^2 = F(a,b,c,d,e,f)$$

con F homogeneo de grado 6.

Geometría Algebraíca

$$\begin{aligned} y^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+ \\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2. \end{aligned}$$

- Define una variedad proyectiva con pesos:

$$X: \quad y^2 = F(a,b,c,d,e,f)$$

  con F homogeneo de grado 6.

- (a,b,c,d,e,f,y) y (ka,kb,kc,kd,ke,kf,k^3y) son el mismo punto en la variedad:

$$[a:b:c:d:e:f:y]$$

Tetraedros de “n-parámetros"

Tetraedros de “n-parámetros"

- Igualar lados (o variables) para encontrar soluciones racionales.

Tetraedros de “n-parámetros"

- Igualar lados (o variables) para encontrar soluciones racionales.
- Clasificar de acuerdo a el número de lados de longitud distinta que puede tener el tetraedro.

Tetraedros de “n-parámetros"

- Igualar lados (o variables) para encontrar soluciones racionales.
- Clasificar de acuerdo a el número de lados de longitud distinta que puede tener el tetraedro.
  - 1-parámetro: $a = b = c = d = e = f$.

Tetraedros de “n-parámetros"

- Igualar lados (o variables) para encontrar soluciones racionales.
- Clasificar de acuerdo a el número de lados de longitud distinta que puede tener el tetraedro.
  - 1-parámetro: $a = b = c = d = e = f$.
  - 2-parámetros: A lo sumo dos longitudes distintas para los lados:

Tetraedros de “n-parámetros"

- Igualar lados (o variables) para encontrar soluciones racionales.
- Clasificar de acuerdo a el número de lados de longitud distinta que puede tener el tetraedro.
  - 1-parámetro: $a = b = c = d = e = f$.
  - 2-parámetros: A lo sumo dos longitudes distintas para los lados:

caso	longitud 1	longitud 2
1	$a = b = c = d = e$	f
2	$a = b = c = d$	$e = f$
3	$a = c = d = f$	$b = e$
4	$a = b = c$	$d = e = f$
5	$a = d = f$	$b = c = e$

Tetraedros racionales de 1-parámetro

$$a = b = c = d = e = f$$

- No existen tetraedros racionales de 1-parámetro:

$$y^2 = 2a^6$$

$$\left(\frac{y}{a^3}\right)^2 = 2$$

Tetraedros racionales de 1-parámetro

$$a = b = c = d = e = f$$

- No existen tetraedros racionales de 1-parámetro:

$$y^2 = 2a^6$$

$$\left(\frac{y}{a^3}\right)^2 = 2$$

- $\sqrt{2}$ no es racional !

Tetraedros racionales de 2-parámetros

caso	longitud 1	longitud 2
1	$a = b = c = d = e$	f
2	$a = b = c = d$	$e = f$
3	$a = c = d = f$	$b = e$
4	$a = b = c$	$d = e = f$
5	$a = d = f$	$b = c = e$

Tetraedros racionales de 2-parámetros

caso	longitud 1	longitud 2
1	$a = b = c = d = e$	f
2	$a = b = c = d$	$e = f$
3	$a = c = d = f$	$b = e$
4	$a = b = c$	$d = e = f$
5	$a = d = f$	$b = c = e$

- caso 1:

$$y^2 = a^2 b^2 (3a^2 - b^2)$$

Tetraedros racionales de 2-parámetros

caso	longitud 1	longitud 2
1	$a = b = c = d = e$	f
2	$a = b = c = d$	$e = f$
3	$a = c = d = f$	$b = e$
4	$a = b = c$	$d = e = f$
5	$a = d = f$	$b = c = e$

- caso 1:

$$y^2 = a^2 b^2 (3a^2 - b^2)$$

$$\left(\frac{y}{a^2 b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 3$$

$x^2 + z^2 = 3$ no tiene soluciones racionales.

- No hay tatreadros racionales en el caso 1.

Tetraedros racionales de 2-parámetros

caso	longitud 1	longitud 2
3	$a = c = d = f$	$b = e$

- sólo hay tetraedros racionales en el caso 3:

$$y^2 = b^4(4a^2 - 2b^2)$$

define una curva proyectiva con pesos con coordenadas $[a : b : y]$ ((a, b, y) y $(ka, kb, k^3 y)$ son el mismo punto en la curva).

Tetraedros racionales de 2-parámetros

caso	longitud 1	longitud 2
3	$a = c = d = f$	$b = e$

- sólo hay tetraedros racionales en el caso 3:

$$y^2 = b^4(4a^2 - 2b^2)$$

define una curva proyectiva con pesos con coordenadas $[a : b : y]$ ((a, b, y) y (ka, kb, k^3y) son el mismo punto en la curva).

$$\left(\frac{y}{ab^2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 4$$

Tetraedros racionales de 2-parámetros

caso	longitud 1	longitud 2
3	$a = c = d = f$	$b = e$

- sólo hay tetraedros racionales en el caso 3:

$$y^2 = b^4(4a^2 - 2b^2)$$

define una curva proyectiva con pesos con coordenadas $[a : b : y]$ ((a, b, y) y $(ka, kb, k^3 y)$ son el mismo punto en la curva).

$$\left(\frac{y}{ab^2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 4$$

$r^2 + 2s^2 = 4$ tiene infinitos puntos racionales:

$$r(t) = \frac{4 - 2t^2}{t^2 + 2} \qquad s(t) = \frac{4t}{t^2 + 2}$$

Tetraedros racionales de 2-parámetros

$$y^2 = b^4(4a^2 - 2b^2)$$

$$\frac{y}{ab^2} = r(t) = \frac{4 - 2t^2}{t^2 + 2} \qquad \frac{b}{a} = s(t) = \frac{4t}{t^2 + 2}$$

Tetraedros racionales de 2-parámetros

$$y^2 = b^4(4a^2 - 2b^2)$$

$$\frac{y}{ab^2} = r(t) = \frac{4-2t^2}{t^2+2} \qquad \frac{b}{a} = s(t) = \frac{4t}{t^2+2}$$

Define un punto $[a(t) : b(t) : y(t)]$ en la curva proyectiva para todo t:

$$a(t) = 1 \qquad b(t) = \frac{4t}{t^2+2} \qquad y(t) = \frac{32t^2(2-t^2)}{(t^2+2)^3}$$

Tetraedros racionales de 2-parámetros

$$y^2 = b^4(4a^2 - 2b^2)$$

$$\frac{y}{ab^2} = r(t) = \frac{4-2t^2}{t^2+2} \qquad \frac{b}{a} = s(t) = \frac{4t}{t^2+2}$$

Define un punto $[a(t) : b(t) : y(t)]$ en la curva proyectiva para todo t:

$$a(t) = 1 \qquad b(t) = \frac{4t}{t^2+2} \qquad y(t) = \frac{32t^2(2-t^2)}{(t^2+2)^3}$$

$$[a(t) : b(t) : y(t)] = \left[t^2 + 2 : 4t : 32t^2(2-t^2)\right]$$

Tetraedros racionales de 2-parámetros

$$y^2 = b^4(4a^2 - 2b^2)$$

$$\frac{y}{ab^2} = r(t) = \frac{4-2t^2}{t^2+2} \qquad \frac{b}{a} = s(t) = \frac{4t}{t^2+2}$$

Define un punto $[a(t) : b(t) : y(t)]$ en la curva proyectiva para todo t:

$$a(t) = 1 \qquad b(t) = \frac{4t}{t^2+2} \qquad y(t) = \frac{32t^2(2-t^2)}{(t^2+2)^3}$$

$$[a(t) : b(t) : y(t)] = \left[t^2+2 : 4t : 32t^2(2-t^2)\right]$$

- Es una parametrizacion proyectiva de (todos) los puntos racionales de la curva.
- Hay infinitos puntos racionales en la curva.

Tetraedros racionales de 3-parámetros

Tetraedros racionales de 3-parámetros

- 2-parámetros

Tetraedros racionales de 3-parámetros

- 2-parámetros $\longrightarrow$ curvas.

Tetraedros racionales de 3-parámetros

- 2-parámetros $\longrightarrow$ curvas.
- 3-parámetros

Tetraedros racionales de 3-parámetros

- 2-parámetros $\longrightarrow$ curvas.
- 3-parámetros $\longrightarrow$ superficies.

Tetraedros racionales de 3-parámetros

- 2-parámetros $\longrightarrow$ curvas.
- 3-parámetros $\longrightarrow$ superficies.
- Los resultados de Catherine Chisholm:

caso	descripción	puntos racionales en la superficie
1	$a=b=c=d$	0
2	$a=c=d=f$	∞
3	$a=b=c$, $d=e$	0
4	$a=d=f$, $b=c$	0
5	$a=d=f$, $b=e$	∞
6	$a=d$, $b=e$, $c=f$	∞
7	$a=e$, $b=f$, $c=d$	0
8	$a=b$, $d=e=f$	∞
9	$a=d$, $b=f$, $c=e$	∞
10	$a=e$, $b=c$, $d=f$	0

En superficies la existencia de infinitos puntos racionales no es suficiente información.

Tetraedros racionales de 3-parámetros

caso	descripción	puntos racionales en la superficie
1	$a = b = c = d$	0
2	$a = c = d = f$	∞
3	$a = b = c$, $d = e$	0
4	$a = d = f$, $b = c$	0
5	$a = d = f$, $b = e$	∞
6	$a = d$, $b = e$, $c = f$	∞
7	$a = e$, $b = f$, $c = d$	0
8	$a = b$, $d = e = f$	∞
9	$a = d$, $b = f$, $c = e$	∞
10	$a = e$, $b = c$, $d = f$	0

Tetraedros racionales de 3-parámetros

caso	**descripción**	**puntos racionales en la superficie**
1	$a = b = c = d$	0
$\Rightarrow$ 2	$a = c = d = f$	∞
3	$a = b = c$, $d = e$	0
4	$a = d = f$, $b = c$	0
5	$a = d = f$, $b = e$	∞
6	$a = d$, $b = e$, $c = f$	∞
7	$a = e$, $b = f$, $c = d$	0
$\Rightarrow$ 8	$a = b$, $d = e = f$	∞
9	$a = d$, $b = f$, $c = e$	∞
10	$a = e$, $b = c$, $d = f$	0

- Casos 2 y 8: Superficies Parametrizables sobre $\mathbb{Q}$. (luego, conocemos todos los puntos racionales).

Tetraedros racionales de 3-parámetros

caso	descripción	puntos racionales en la superficie
1	$a = b = c = d$	0
2	$a = c = d = f$	∞
3	$a = b = c$, $d = e$	0
4	$a = d = f$, $b = c$	0
5	$a = d = f$, $b = e$	∞
6	$a = d$, $b = e$, $c = f$	∞
7	$a = e$, $b = f$, $c = d$	0
8	$a = b$, $d = e = f$	∞
9	$a = d$, $b = f$, $c = e$	∞
10	$a = e$, $b = c$, $d = f$	0

- Casos 2 y 8: Superficies Parametrizables sobre $\mathbb{Q}$ (luego, conocemos todos los puntos racionales).
- Casos 5 y 6: Conjunto de puntos racionales denso en la topología de Zariski.

Tetraedros racionales de 3-parámetros

caso	**descripción**	**puntos racionales en la superficie**
1	$a = b = c = d$	0
2	$a = c = d = f$	∞
3	$a = b = c$, $d = e$	0
4	$a = d = f$, $b = c$	0
5	$a = d = f$, $b = e$	∞
6	$a = d$, $b = e$, $c = f$	∞
7	$a = e$, $b = f$, $c = d$	0
8	$a = b$, $d = e = f$	∞
9	$a = d$, $b = f$, $c = e$	∞
10	$a = e$, $b = c$, $d = f$	0

- Casos 2 y 8: Superficies Parametrizables sobre $\mathbb{Q}$ (luego, conocemos todos los puntos racionales).
- Casos 5 y 6: Conjunto de puntos racionales denso en la topología de Zariski.
- Caso 9: Ejercicio!

Los casos 5 y 6 de 3-parámetros

Lo que se va a hacer:

Los casos 5 y 6 de 3-parámetros

Lo que se va a hacer:

- Encontrar un conjunto infinito de curvas contenidas en las superficies, cada una con infinitos puntos racionales.

Los casos 5 y 6 de 3-parámetros

Lo que se va a hacer:

- Encontrar un conjunto infinito de curvas contenidas en las superficies, cada una con infinitos puntos racionales.

Teorema:

Si X es una superficie irredicuble y Γ es un conjunto infinito de curvas irreducibles contenido en X, entonces

$$\bigcup \Gamma$$

es denso en X con la topología de Zariski.

- Luego, el conjunto de puntos racionales de las superficies es denso en la topología de Zariski.

Caso 5 de 3-parámetros

caso	longitud 1	longitud 2	longitud 3
5	$a = d = f$	$b = e$	c

La Superficie:

$$S: \quad y^2 = -(a^2 + 2b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - ac)(a^2 - b^2 + ac)$$

Caso 5 de 3-parámetros

caso	longitud 1	longitud 2	longitud 3
5	$a=d=f$	$b=e$	c

La Superficie:

$$S: \quad y^2 = -(a^2+2b^2-c^2)(a^2-b^2-ac)(a^2-b^2+ac)$$

Parte afín $a \neq 0$:

$$y_1 = \frac{y}{a^3} \quad x = \frac{c}{a} \quad \lambda = \frac{b}{a}$$

$$S_a: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2-x^2)(x-(1-\lambda^2))(x+(1-\lambda^2))$$

Fibración del Caso 5

$$S_a : \quad y_1^2 = (1 + 2\lambda^2 - x^2)(x - (1 - \lambda^2))(x + (1 - \lambda^2))$$

Fibración:

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & S_a & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ & (x, \lambda, y_1) & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

Fibración del Caso 5

$$S_a : \quad y_1^2 = (1 + 2\lambda^2 - x^2)(x - (1 - \lambda^2))(x + (1 - \lambda^2))$$

Fibración:

$$\begin{aligned} \sigma : \qquad S_a \quad & \longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, \lambda, y_1) \quad & \longmapsto \lambda \end{aligned}$$

- Las fibras casi siempre son curvas elípticas sobre $\mathbb{Q}$.

Fibración del Caso 5

$$S_a : \quad y_1^2 = (1 + 2\lambda^2 - x^2)(x - (1 - \lambda^2))(x + (1 - \lambda^2))$$

Fibración:

$$\begin{aligned} \sigma : \qquad S_a \quad &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, \lambda, y_1) \quad &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

- Las fibras casi siempre son curvas elípticas sobre $\mathbb{Q}$.
- La fibra genérica es elíptica.
- La fibra Genérica: CURVA

$$E_\lambda : \quad y_1^2 = (1 + 2\lambda^2 - x^2)(x - (1 - \lambda^2))(x + (1 - \lambda^2))$$

  sobre el campo $\mathbb{Q}(\lambda)$ con coordenadas x, y_1.
- La secciones de σ son puntos de E_λ.
- Las imagenes de las secciones son curvas en S_a.

Curvas en S

- La curva C parametrizada por

$$[a(t) : b(t) : c(t) : y(t)] = [t^2 + 2 : 4t : t^2 + 2 : 32t^2(2 - t^2)]$$

es una curva contenida en S.

Curvas en S

- La curva C parametrizada por

$$[a(t) : b(t) : c(t) : y(t)] = [t^2 + 2 : 4t : t^2 + 2 : 32t^2(2 - t^2)]$$

  es una curva contenida en S.
- C contiene infinitos puntos racionales.

Curvas en S

- La curva C parametrizada por

$$[a(t) : b(t) : c(t) : y(t)] = [t^2 + 2 : 4t : t^2 + 2 : 32t^2(2 - t^2)]$$

  es una curva contenida en S.
- C contiene infinitos puntos racionales.
- C es la curva de puntos de S que satisface $a = c$.

Curvas en S

- La curva C parametrizada por

$$[a(t) : b(t) : c(t) : y(t)] = [t^2 + 2 : 4t : t^2 + 2 : 32t^2(2 - t^2)]$$

  es una curva contenida en S.
- C contiene infinitos puntos racionales.
- C es la curva de puntos de S que satisface $a = c$.
- C corresponde al caso 3 de 2-parámetros.

Curvas en S

- La curva C parametrizada por

$$[a(t) : b(t) : c(t) : y(t)] = [t^2 + 2 : 4t : t^2 + 2 : 32t^2(2 - t^2)]$$

  es una curva contenida en S.
- C contiene infinitos puntos racionales.
- C es la curva de puntos de S que satisface $a = c$.
- C corresponde al caso 3 de 2-parámetros.
- La parte afín de C:

$$x(t) = 1, \qquad y_1(t) = \frac{32t^2(2 - t^2)}{t^2 + 2}, \qquad \lambda(t) = \frac{4t}{t^2 + 2},$$

  en $\quad S_a : \quad y_1^2 = (1 + 2\lambda^2 - x^2)(x - (1 - \lambda^2))(x + (1 - \lambda^2))$.

C y la fibra genérica

$$C: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right]$$

$$E_\lambda: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2-x^2)(x-(1-\lambda^2))(x+(1-\lambda^2))$$

C y la fibra genérica

$$C : \quad [x(t) : \lambda(t) : y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right]$$

$$E_\lambda : \quad y_1^2 = (1 + 2\lambda^2 - x^2)(x - (1-\lambda^2))(x + (1-\lambda^2))$$

- C no es un punto en la fibra genérica E_λ sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$...

C y la fibra genérica

$$C: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right]$$

$$E_\lambda: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2-x^2)(x-(1-\lambda^2))(x+(1-\lambda^2))$$

- C no es un punto en la fibra genérica E_λ sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$...
- pero si lo es sobre el campo de extensión $\mathbb{Q}(t) \supseteq \mathbb{Q}(\lambda)$.

C y la fibra genérica

$$C: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right]$$

$$E_\lambda: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2-x^2)(x-(1-\lambda^2))(x+(1-\lambda^2))$$

- C no es un punto en la fibra genérica E_λ sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$...
- pero si lo es sobre el campo de extensión $\mathbb{Q}(t) \supseteq \mathbb{Q}(\lambda)$.
- Sobre $\mathbb{Q}(t)$, la ecuación de E_λ es:

$$E_\lambda/\mathbb{Q}(t): \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))).$$

- C corresponde al punto $P_C = (x, y_1) = (x(t), y_1(t))$.

C y la fibra genérica

$$C: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right]$$

$$E_\lambda: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2-x^2)(x-(1-\lambda^2))(x+(1-\lambda^2))$$

- C no es un punto en la fibra genérica E_λ sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$...
- pero si lo es sobre el campo de extensión $\mathbb{Q}(t) \supseteq \mathbb{Q}(\lambda)$.
- Sobre $\mathbb{Q}(t)$, la ecuación de E_λ es:

$$E_\lambda/\mathbb{Q}(t): \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))).$$

- C corresponde al punto $P_C = (x, y_1) = (x(t), y_1(t))$.
- Recíprocamente, si $P = (x, y_1) = (\phi(t), \psi(t))$ es un punto en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$, entonces $\left[\phi(t), \frac{4t}{t^2+2} : \psi(t)\right]$ es la parametrización de una curva en S_a con infinitos puntos racionales.

Múltiplos de C

$$\begin{aligned} C \quad &: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\ E_\lambda/\mathbb{Q}(t) \quad &: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))). \end{aligned}$$

- C corresponde al punto $P_C = (x, y_1) = (x(t), y_1(t)) \in E_\lambda(\mathbb{Q}(t))$.

Múltiplos de C

$$\begin{aligned} C \quad &: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\ E_\lambda/\mathbb{Q}(t) \quad &: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))). \end{aligned}$$

- C corresponde al punto $P_C = (x, y_1) = (x(t), y_1(t)) \in E_\lambda(\mathbb{Q}(t))$.
- Podemos calcular múltiplos de P_C.
- Cada múltiplo de P_C da una curva en S_a (luego en S).

Múltiplos de C

$$
\begin{aligned}
C \quad &: \quad [x(t) : \lambda(t) : y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\
E_\lambda/\mathbb{Q}(t) \quad &: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t) - x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))).
\end{aligned}
$$

- C corresponde al punto $P_C = (x, y_1) = (x(t), y_1(t)) \in E_\lambda(\mathbb{Q}(t))$.
- Podemos calcular múltiplos de P_C.
- Cada múltiplo de P_C da una curva en S_a (luego en S).
- Ejemplo: $2 \cdot P_C$ corresponde a la curva:

Múltiplos de C

$$\begin{aligned} C &: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\ E_\lambda/\mathbb{Q}(t) &: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))). \end{aligned}$$

- C corresponde al punto $P_C = (x, y_1) = (x(t), y_1(t)) \in E_\lambda(\mathbb{Q}(t))$.
- Podemos calcular múltiplos de P_C.
- Cada múltiplo de P_C da una curva en S_a (luego en S).
- Ejemplo: $2 \cdot P_C$ corresponde a la curva:

$$\begin{aligned} a(t) &= t^2+2 \\ b(t) &= 4t \\ c(t) &= \frac{(t^2-4t+2)(t^2+4t+2)(t^8+20t^6-56t^4+80t^2+16)}{(t^2+2)(t^8-12t^6+72t^4-48t^2+16)} \\ y(t) &= -2^8 3 \frac{t^4(t^2-4t+2)(t^2-2t+2)(t^2-6)(t^2-2)(t^2-\frac{2}{3})(t^2+2t+2)(t^2+4t+2)}{(t^8-12t^6+72t^4-48t^2+16)^2}. \end{aligned}$$

El conjunto de puntos racionales del caso 5 es denso.

- P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

El conjunto de puntos racionales del caso 5 es denso.

- P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.
- Luego,

$$\{n \cdot C | n \in \mathbb{N}\}$$

es un conjunto infinito de curvas en S, cada una con infinitos puntos racionales.

Así, el conjunto de puntos racionales es denso en la superficie del caso 5.

El conjunto de puntos racionales del caso 5 es denso.

- P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.
- Luego,

  $$\{n \cdot C | n \in \mathbb{N}\}$$

  es un conjunto infinito de curvas en S, cada una con infinitos puntos racionales.

  Así, el conjunto de puntos racionales es denso en la superficie del caso 5.
- Caso 6: Se puede hacer lo mismo.

El conjunto de puntos racionales del caso 5 es denso.

- P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.
- Luego,

$$\{n \cdot C | n \in \mathbb{N}\}$$

  es un conjunto infinito de curvas en S, cada una con infinitos puntos racionales.

  Así, el conjunto de puntos racionales es denso en la superficie del caso 5.

- Caso 6: Se puede hacer lo mismo.
  - Fibración de la superficie.
  - La fibra genérica es una curva elíptica.
  - Existe una curva en la superficie con infinitos puntos racionales que corresponde an un punto en la fibra genérica sobre un campo de extensión.
  - El punto en la fibra genérica tiene orden infinito.

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E/k: \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E/k: \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

- Teorema de Nagel-Lutz:

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E/k: \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

- Teorema de Nagel-Lutz:
  - Si $k = \mathbb{Q}$,

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E/k: \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

- Teorema de Nagel-Lutz:
  - Si $k = \mathbb{Q}$,
  - $a, b, c \in \mathbb{N}$,

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E/k: \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

- Teorema de Nagel-Lutz:
  - Si $k = \mathbb{Q}$,
  - $a, b, c \in \mathbb{N}$,
  - $P \in E(\mathbb{Q})$ es de orden finito.

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E/k: \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

- Teorema de Nagel-Lutz:
  - Si $k = \mathbb{Q}$,
  - $a, b, c \in \mathbb{N}$,
  - $P \in E(\mathbb{Q})$ es de orden finito.

  Entonces $x(P), y(P) \in \mathbb{N}$.

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E/k: \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

- Teorema de Nagel-Lutz:
  - Si $k = \mathbb{Q}$,
  - $a, b, c \in \mathbb{N}$,
  - $P \in E(\mathbb{Q})$ es de orden finito.

  Entonces $x(P), y(P) \in \mathbb{N}$.
- El teorema de Nagel-Lutz también es cierto para $\mathbb{Q}(t)$:

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E/k: \quad y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

- Teorema de Nagel-Lutz:
  - Si $k = \mathbb{Q}$,
  - $a, b, c \in \mathbb{N}$,
  - $P \in E(\mathbb{Q})$ es de orden finito.

  Entonces $x(P), y(P) \in \mathbb{N}$.
- El teorema de Nagel-Lutz también es cierto para $\mathbb{Q}(t)$:
  - Si $k = \mathbb{Q}(t)$,
  - $a, b, c \in \mathbb{Q}[t]$,
  - $P \in E(\mathbb{Q}(t))$ es de orden finito.

  Entonces $x(P), y(P) \in \mathbb{Q}[t]$.

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E_\lambda : \quad y_1^2 = (1 + 2\lambda^2 - x^2)(x - (1 - \lambda^2))(x + (1 - \lambda^2))$$

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E_\lambda : \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2 - x^2)(x-(1-\lambda^2))(x+(1-\lambda^2))$$

- Punto $O = (x, y_1) = (\lambda^2 - 1, 0)$ definido sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$.
- E_λ es una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$.

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E_\lambda : \quad y_1^2 = (1 + 2\lambda^2 - x^2)(x - (1 - \lambda^2))(x + (1 - \lambda^2))$$

- Punto $O = (x, y_1) = (\lambda^2 - 1, 0)$ definido sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$.
- E_λ es una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$.
- Forma de Weierstrass de E_λ enviando a O al infinito:

$$E_\lambda : \quad v^2 = u^3 + A(\lambda)u + B(\lambda)$$

donde

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= -(16 - 32\lambda^4 + 24\lambda^6 + \lambda^8)/3 \\ B(\lambda) &= 2(2 + \lambda^4)(-32 + 112\lambda^4 - 72\lambda^6 + \lambda^8)/27. \end{aligned}$$

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$E_\lambda : \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2 - x^2)(x-(1-\lambda^2))(x+(1-\lambda^2))$$

- Punto $O = (x, y_1) = (\lambda^2 - 1, 0)$ definido sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$.
- E_λ es una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}(\lambda)$.
- Forma de Weierstrass de E_λ enviando a O al infinito:

$$E_\lambda : \quad v^2 = u^3 + A(\lambda)u + B(\lambda)$$

donde
$$\begin{aligned} A(\lambda) &= -(16 - 32\lambda^4 + 24\lambda^6 + \lambda^8)/3 \\ B(\lambda) &= 2(2+\lambda^4)(-32 + 112\lambda^4 - 72\lambda^6 + \lambda^8)/27. \end{aligned}$$

- La ecuación de Weierstrass de E_λ define una superficie birracionalmente equivalente a S_a, donde las fibras de $S_a \to \lambda$ están ahora en forma de Weierstrass.

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$\begin{aligned} C \quad &: \quad [x(t) : \lambda(t) : y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\ E_\lambda/\mathbb{Q}(t) \quad &: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t) - x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))). \end{aligned}$$

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$\begin{aligned} C \quad &: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\ E_\lambda/\mathbb{Q}(t) \quad &: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))). \end{aligned}$$

- Forma de Weierstrass de E_λ:

$$E_\lambda : \quad v^2 = u^3 + A(\lambda)u + B(\lambda)$$

con $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda]$.

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$\begin{array}{lcl} C & : & [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \dfrac{4t}{t^2+2} : \dfrac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\ E_\lambda/\mathbb{Q}(t) & : & y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))). \end{array}$$

- Forma de Weierstrass de E_λ:

$$E_\lambda : \quad v^2 = u^3 + A(\lambda)u + B(\lambda)$$

  con $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda]$.

- Forma de Weierstrass de $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$: Cambiar λ por $\frac{4t}{t^2+2}$.

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$\begin{array}{lcl} C & : & [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \dfrac{4t}{t^2+2} : \dfrac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\ E_\lambda/\mathbb{Q}(t) & : & y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))). \end{array}$$

- Forma de Weierstrass de E_λ:

$$E_\lambda : \quad v^2 = u^3 + A(\lambda)u + B(\lambda)$$

  con $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda]$.

- Forma de Weierstrass de $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$: Cambiar λ por $\frac{4t}{t^2+2}$.
- Forma de Weierstrass de $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$ con coeficientes en $\mathbb{Q}[t]$:

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

$$
\begin{aligned}
C \quad &: \quad [x(t):\lambda(t):y_1(t)] = \left[1 : \frac{4t}{t^2+2} : \frac{32t^2(2-t^2)}{t^2+2}\right] \\
E_\lambda/\mathbb{Q}(t) \quad &: \quad y_1^2 = (1+2\lambda^2(t)-x^2)(x-(1-\lambda^2(t)))(x+(1-\lambda^2(t))).
\end{aligned}
$$

- Forma de Weierstrass de E_λ:

$$E_\lambda : \quad v^2 = u^3 + A(\lambda)u + B(\lambda)$$

  con $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda]$.
- Forma de Weierstrass de $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$: Cambiar λ por $\frac{4t}{t^2+2}$.
- Forma de Weierstrass de $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$ con coeficientes en $\mathbb{Q}[t]$:

  Multiplicar la ecuación por una potencia apropiada de los denominadores de los coeficientes y hacer un cambio de variables (u', v').

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

- El resultado:

$$E_\lambda/\mathbb{Q}(t): \quad v'^2 = u'^3 + A'(t)u' + B'(t)$$

donde

$$\begin{aligned} A'(t) &= t^{16} + 16t^{14} - 400t^{12} + 2496t^{10} + 17504t^8 + 9984t^6 - 6400t^4 + 1024t^2 + 256 \\ B'(t) &= (t^8 + 8t^6 + 152t^4 + 32t^2 + 16)(t^{16} + 16t^{14} - 784t^{12} + 2496t^{10} + 14432t^8 + \\ &\quad 9984t^6 - 12544t^4 + 1024t^2 + 256) \end{aligned}$$

P_C es de orden infinito en $E_\lambda/\mathbb{Q}(t)$.

- El resultado:

$$E_\lambda/\mathbb{Q}(t): \quad v'^2 = u'^3 + A'(t)u' + B'(t)$$

donde

$$\begin{aligned} A'(t) &= t^{16} + 16t^{14} - 400t^{12} + 2496t^{10} + 17504t^8 + 9984t^6 - 6400t^4 + 1024t^2 + 256 \\ B'(t) &= (t^8 + 8t^6 + 152t^4 + 32t^2 + 16)(t^{16} + 16t^{14} - 784t^{12} + 2496t^{10} + 14432t^8 + \\ & \quad 9984t^6 - 12544t^4 + 1024t^2 + 256) \end{aligned}$$

- La coordenadas (u', v') de P_C son:

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{4(t^{12} + 4t^{10} - 260t^8 - 544t^6 - 1040t^4 + 64t^2 + 64)}{3(t^2-2)^2} \\ v' &= -1024\frac{(t^2+2)(t^2-4t+2)(t^2-2t+2)(t^2+2t+2)(t^2+4t+2)t^4}{(t^2-2)^3} \end{aligned}$$

- Así, P_C es de orden infinito.

Soluciones racionales que corresponden a tetraedros.

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$

- No toda solución *real* corresponde a un tetraedro.
- Para que una solucion real corresponda a un tetrahedro por lo menos se debe tener $a, b, c, d, e, f, V > 0$, pero esto no es suficiente.

Soluciones racionales que corresponden a tetraedros.

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$

- No toda solución *real* corresponde a un tetraedro.
- Para que una solucion real corresponda a un tetrahedro por lo menos se debe tener $a, b, c, d, e, f, V > 0$, pero esto no es suficiente.
- Condición necesaria: Las caras del tetraedro deben existir (se deben cumplir las desigualdades triangulares).

Soluciones racionales que corresponden a tetraedros.

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= (a^2+d^2)(-a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)+(b^2+e^2)(a^2d^2-b^2e^2+c^2f^2)+\\ &\quad (c^2+f^2)(a^2d^2+b^2e^2-c^2f^2)-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2.\end{aligned}$$

- No toda solución *real* corresponde a un tetraedro.
- Para que una solucion real corresponda a un tetrahedro por lo menos se debe tener $a, b, c, d, e, f, V > 0$, pero esto no es suficiente.
- Condición necesaria: Las caras del tetraedro deben existir (se deben cumplir las desigualdades triangulares).
- Los puntos racionales encontrados:
  - C tiene infinitos tetraedros racionales.
  - CREO que $2 \cdot C$ tiene infinitos tetraedros racionales.

Preguntas:

Preguntas:

- ¿Las superficies de los casos 5 y 6 son parametrizables?

Preguntas:

- ¿Las superficies de los casos 5 y 6 son parametrizables?
- ¿Los puntos racionales que econtré son todos los puntos racionales?

Preguntas:

- ¿Las superficies de los casos 5 y 6 son parametrizables?
- ¿Los puntos racionales que econtré son todos los puntos racionales?
- ¿Cuándo tiene $n \cdot C$ puntos que corresponden a tetraedros?

Preguntas:

- ¿Las superficies de los casos 5 y 6 son parametrizables?
- ¿Los puntos racionales que econtré son todos los puntos racionales?
- ¿Cuándo tiene $n \cdot C$ puntos que corresponden a tetraedros?

Con referencia a las fibraciones:

Preguntas:

- ¿Las superficies de los casos 5 y 6 son parametrizables?
- ¿Los puntos racionales que econtré son todos los puntos racionales?
- ¿Cuándo tiene $n \cdot C$ puntos que corresponden a tetraedros?

Con referencia a las fibraciones:

- ¿Cuál es el rango de las fibras genéricas?

Preguntas:

- ¿Las superficies de los casos 5 y 6 son parametrizables?
- ¿Los puntos racionales que econtré son todos los puntos racionales?
- ¿Cuándo tiene $n \cdot C$ puntos que corresponden a tetraedros?

Con referencia a las fibraciones:

- ¿Cuál es el rango de las fibras genéricas?
- ¿Cuál es el rango de las fibras?

Preguntas:

- ¿Las superficies de los casos 5 y 6 son parametrizables?
- ¿Los puntos racionales que econtré son todos los puntos racionales?
- ¿Cuándo tiene $n \cdot C$ puntos que corresponden a tetraedros?

Con referencia a las fibraciones:

- ¿Cuál es el rango de las fibras genéricas?
- ¿Cuál es el rango de las fibras?
- Cada tetraedro racional que satisface las igualdades del caso 5 (o 6) da un punto racional en la superficie en cierta fibra.
  - ¿Cuándo tiene este punto orden infinito en su fibra?
  - ¿Cuándo genera infinitos tatraedros racionales?

PREGUNTAS